Prof. Dr. H. Brenner　　　　　　　　　　Osnabrück WS 2009/2010

Mathematik I

Vorlesung 16

Eigentheorie

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Beiden Vektoren ist gemeinsam, dass ihr Bild unter der linearen Abbildung im von dem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum bleibet. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbidung auf sich selbst abgebildet werden.

Eine Achsenspiegelung besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert -1.

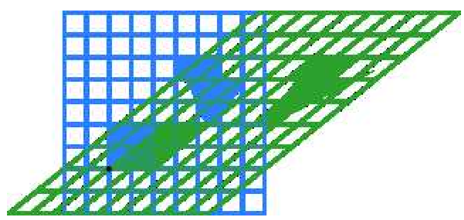
Definition 16.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, ein *Eigenvektor* von φ (zum Eigenwert λ), wenn

$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem $\lambda \in K$.



Eine Scherung hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weitere Eigenwerte.

Definition 16.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von null verschiedenen Vektor $v \in V$ gibt mit

$$\varphi(v) = \lambda v \, .$$

Definition 16.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v \}$$

den *Eigenraum* zu φ zum Wert λ.

Wir erlauben also beliebige Werte in der Definition der Eigenräume. Einen eindimensionalen Eigenraum nennen wir auch *Eigengerade*.

Lemma 16.4. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Der Eigenraum*

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$

ist ein Untervektorraum von V.

(2) *λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.*

(3) *Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.1. $\square$

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe. Ist $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und M eine beschreibende Matrix bzgl. einer Basis, so gilt für einen Eigenwert λ und einen Eigenvektor $v \in V$ mit dem Koordinatentupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis die Beziehung $M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Die Matrix N bzgl. einer weiteren Basis steht dann in der Beziehung $N = BMB^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix B. Es sei $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ das Koordinatentupel bzgl. der anderen Basis. Dann ist

$$N \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (BMB^{-1}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (BMB^{-1})B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BM \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$B\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

d.h. die beschreibenden Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte, wobei allerdings die beschreibenden Koordinatentupel für die Eigenvektoren sich mit den Basen ändern.

Beispiel 16.5. Wie betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^n,\ e_i \longmapsto d_i e_i .$$

Die Diagonaleinträge d_i sind Eigenwerte von φ, und zwar ist e_i ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_d(\varphi) = \{v \in K |\, v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist}\} .$$

Diese Räume sind genau dann von null verschieden, wenn d mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist gegeben durch die Anzahl, wie oft der Wert d in der Diagonalen vorkommt. Die Summe der Dimensionen ergibt n.

Beispiel 16.6. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt dazu, ob es $\lambda \in \mathbb{Q}$ derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine nichtriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ besitzt. Bei gegebenem λ kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen dem variablen „Eigenwertparameter“ λ zu nichtlinearen Problemen. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y \,.$$

Aus den beiden Gleichungen erhält man die notwendige Bedingung

$$5y \;=\; \lambda x \;=\; \lambda^2 y.$$

Bei $y = 0$ ist auch $x = 0$. Bei $y \neq 0$ folgt aus dieser Gleichung

$$5 = \lambda^2 \,.$$

Da in $\mathbb{Q}$ die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass φ keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix M als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix} .$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung $5 = \lambda^2$, die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man jetzt unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = \sqrt{5}$, was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man also

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} +\sqrt{5} & -5 \\ -1 & +\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für $\lambda = -\sqrt{5}$ führen dieselben Umwandlungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über $\mathbb{R}$ sind also $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \{s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} \text{ und } \operatorname{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \{s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

LEMMA 16.7. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

Insbesondere ist 0 genau dann ein Eigenwert von φ, wenn φ nicht injektiv ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 16.2. □

Allgemeiner gilt die folgende Charakterisierung.

LEMMA 16.8. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi).$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi)(v) = 0$ schreiben kann. □

BEMERKUNG 16.9. Neben dem Eigenraum zu $0 \in K$, der der Kern der linearen Abbildung ist, sind insbesondere die Eigenwerte 1 und -1 interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt also die Abbildung wie die Identität. Der Eigenraum zu -1 besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

LEMMA 16.10. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.3. □

Lemma 16.11. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu verschiedenen Elementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für Zahlen $< n$ bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 .$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten

$$\lambda_1 a_1 v_1 + \ldots + \lambda_n a_n v_n = 0 .$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \ldots + \lambda_n a_n v_n = 0 .$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1) a_1 v_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{n-1} v_{n-1} = 0 .$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i) a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$. □

Korollar 16.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es nur endlich viele Eigenwerte zu φ.

Beweis. Siehe Aufgabe 16.4. □

Diagonalisierbarkeit

Definition 16.13. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 16.14. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*

(2) *Es gibt eine Basis* $\mathfrak{v}$ *von* V *derart, dass die beschreibende Matrix* $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ *eine Diagonalmatrix ist.*
(3) *Für jede beschreibende Matrix* $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ *gibt es eine invertierbare Matrix* B *derart, dass*

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 16.5 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 13.11. □

KOROLLAR 16.15. *Es sei* K *ein Körper und es sei* V *ein endlichdimensionaler* K*-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim(V)$ *verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist* φ *diagonalisierbar.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 16.11 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 11.13 eine Basis. □

BEISPIEL 16.16. Wir schließen an Beispiel 16.6 an. Es gibt die zwei Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung diagonalisierbar ist. Bzgl. der Basis $\mathfrak{v}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} .$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{v}$ zur Basis $\mathfrak{u} = e_1, e_2$ ist einfach

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Gemäß Korollar 13.11 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Beispiel 16.17. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Die Eigenwertbedingung für ein $\lambda \in K$ bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

was zu den beiden Gleichungen

$$x + ay = \lambda x \text{ und } y = \lambda y$$

führt. Bei $\lambda = 0$ folgt $y = 0$ und dann auch $x = 0$, d.h., $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert. Sei also $\lambda \neq 0$. Bei $\lambda \neq 1$ folgt $y = 0$ und damit wieder auch $x = 0$. Es kann also nur $\lambda = 1$ ein Eigenwert sein. In diesem Fall ist die zweite Gleichung erfüllt und die erste Gleichung wird zu

$$x + ay = x \text{ bzw. } ay = 0\,.$$

Bei $a \neq 0$ muss also $y = 0$ sein und dann ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ der Eigenraum zum Eigenwert 1, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein typischer Eigenvektor. Bei $a = 0$ liegt die Einheitsmatrix vor, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die gesamte Ebene.

Abbildungsverzeichnis