Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 26

Die Invarianten der binären Oktaedergruppe

Wir setzen die Berechnung der Invariantenringe zu den Operationen der endlichen Untergruppen der $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ fort.

Beispiel 26.1. Zur Berechnung des Invariantenringes zur Operation der binären Oktaedergruppe BO auf $\mathbb{C}[U, V]$ benutzen wir die Normalteilerbeziehung $\mathrm{BT} \subseteq \mathrm{BO}$ (mit der Restklassengruppe $\mathbb{Z}/(2)$), Proposition 5.1 und Beispiel 25.5. Das Element $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^7 \end{pmatrix} \in \mathrm{BO} \setminus \mathrm{BT}$, wobei ξ eine achte primitive Einheitswurzel ist, wirkt durch $U \mapsto \xi U$ und $V \mapsto \xi^7 V$. Somit wird in der Darstellung

$$\mathbb{C}[U, V]^{\mathrm{BT}} = \mathbb{C}[N, P, Q]/(Q^2 - P^3 + 108N^4)$$

das Polynom $N = UV\left(U^4 - V^4\right)$ auf

$$UV\left(-U^4 + V^4\right) = -N,$$

P auf P und Q auf $-Q$ geschickt. Auf dem isomorphen Ring $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^4)$ ist dies einfach die Operation, die Y auf sich und X, Z auf ihr Negatives abbildet. Wir arbeiten mit der $\mathbb{Z}/(2)$-Graduierung, bei der Y den Grad 0 und X, Z den Grad 1 besitzen. Nach Korollar 7.11 ist der Invariantenring gleich der neutralen Stufe in der Graduierung. Diese Stufe wird neben Y von $R = XZ$ und $S = Z^2$ erzeugt (wegen $X^2 = -Y^3 - (Z^2)^2$ kann man auf X^2 verzichten). Zwischen Y, R, S besteht die Relation

$$R^2 + Y^3 S + S^3 = (XZ)^2 + Y^3 Z^2 + Z^6 = Z^2\left(X^2 + Y^3 + Z^4\right) = 0.$$

Nach Umbenennung der Variablen ist also der Invariantenring zur binären Oktaedergruppe isomorph zu

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/\left(X^2 + Y^3 + YZ^3\right).$$

Diesen Invariantenring bezeichnet man als *E_7-Singularität*.

Die Invarianten der binären Ikosaedergruppe

Der Invariantenring zur binären Ikosaedergruppe verhält sich in vielerlei Hinsicht anders als die bisher besprochenen Invariantenringe. Wir können den Invariantenring nicht aus der Kenntnis von anderen Invariantenringen berechnen. Dafür können wir zeigen, dass es keinen nichttrivialen Charakter der binären Ikosaedergruppe gibt, woraus sich über Satz 25.3 direkt invariante Polynome ergeben.

Lemma 26.2. *Die binäre Ikosaedergruppe* BI *besitzt keinen nichttrivialen Charakter.*

Beweis. Wir gehen von der Darstellung der binären Ikosaedergruppe in Beispiel 23.5 aus. Es sei

$$\psi\colon \text{ BI} \longrightarrow \mathbb{Z}/(\ell)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Wenn das Element $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf 0 abgebildet wird, so faktorisiert dieser Homomorphismus durch die reelle Ikosaedergruppe. Diese ist aber isomorph zur alternierenden Gruppe A_5, welche einfach ist. Also wird diese Matrix nicht auf 0 abgebildet und somit muss ℓ gerade ≥ 2 sein. Dann gibt es auch einen surjektiven Homomorphismus für $\ell = 2$. Der Kern dieser Abbildung besitzt 60 Elemente. Aufgrund der Liste in Satz 24.4 kommen dafür nur eine zyklische Gruppe oder eine Diedergruppe in Frage. In beiden Fällen hätte BI ein Element der Ordnung 15 und damit hätte auch die reelle Ikosaedergruppe ein solches Element, was aber nicht der Fall ist. □

Lemma 26.3. *Der Invariantenring* $\mathbb{C}[U,V]^{BI}$ *zur binären Ikosaedergruppe besitzt im Grad* 60 *die Dimension* 2.

Beweis. Wir verwenden Lemma 19.6 und Techniken, die auch im Beweis zur Formel von Molien verwendet werden. Sei dazu $\sigma \in BI$, das bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$ beschrieben wird, wobei ξ eine Einheitswurzel ist. Die Wirkungsweise dieses Elementes auf der d-ten Stufe $\mathbb{C}[W,Z]_d$ ist durch

$$W^i Z^{d-i} \mapsto \xi^i \xi^{i-d} W^i Z^{d-i} = \xi^{2i-d} W^i Z^{d-i}$$

gegeben (W, Z seien die Linearformen zur gewählten Basis). Daher ist die Spur von $\sigma^{(d)}$ durch

$$\sum_{i=0}^{d} \xi^{2i-d} = \xi^{-d} \sum_{i=0}^{d} \left(\xi^2\right)^i$$

gegeben. Sei nun $d = 60$. Da die Ordnung von σ nach Aufgabe 24.15 ein Teiler von 60 ist, sind die ξ, ξ^{-1}, ξ^2 sechzigste Einheitswurzeln. Bei $\sigma = \pm E_2$ ist diese Summe jeweils 61. Bei jedem anderen Gruppenelement ist nach Satz 24.3 $\xi^2 \neq 1$ und daher durchlaufen die Summanden von $i = 0$ bis $i = 59$ mehrfach sämtliche Potenzen von ξ^2, so dass diese Summe 0 ist und lediglich der Summand $\left(\xi^2\right)^{60} = 1$ übrigbleibt. Die Summe der Spuren zu allen $\sigma^{(60)}$, $\sigma \in BI$, ist somit $61 + 61 + 118 = 240$. Nach Lemma 19.6 ist also $\dim\left(\mathbb{C}[U,V]_{60}^{BI}\right) = 2$. □

Beispiel 26.4. Mit Hilfe von Satz 25.3 und Lemma 26.2 kann man direkt invariante Polynome für die binäre Ikosaedergruppe angeben. Ein Ikosaeder hat 12 Ecken, 20 Flächen und 30 Kanten, wobei die Ecken, die Flächenmittelpunkte und die Kantenmittelpunkte die Halbachsenklassen bilden. Daher gibt es invariante Polynome A, B, C vom Grad $12, 20$ und 30. Diese kann man mit einigem Rechenaufwand explizit ausrechnen, indem man explizit die Halbachsenklassen der reellen Ikosaedergruppe angibt (also beispielsweise alle zwölf Eckpunkte), diese ins Komplexe übersetzt und die zugehörigen Linearformen multipliziert. Unabhängig davon, ob diese Polynome explizit oder nicht vorliegen, kann man zeigen, dass diese den Invarianenring erzeugen, dass also $R^G = \mathbb{C}[A, B, C]$ gilt. Sei dazu $P \in R^G$ invariant, das wir als homogen annehmen dürfen. Wir führen Induktion über den Grad, wobei der Grad 0 der (triviale) Induktionsbeginn ist. Es sei P homogen von positivem Grad und es sei

$$P = \prod_{j=1}^{s} (d_j U - c_j V)$$

die Faktorzerlegung in Linearfaktoren. Nach Satz 25.3 (3) enthält die (nichtleere) Indexmenge eine volle Bahn der Operation der reellen Ikosaedergruppe auf S^2 bzw. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Wenn diese Bahn eine Halbachsenklasse ist, so ist

$$P = HD$$

mit $D = A, B$ oder $= C$. Wegen der Invarianz von P und D ist auch H invariant. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $H \in \mathbb{C}[A, B, C]$. Wenn dagegen die Indexmenge keine Halbachsenklasse enthält, so enthält sie eine Bahn mit sechzig Elementen (aus $\sigma(P) = P$ für $\sigma \in I$ folgt, dass P ein Halbachsenpunkt ist). Also ist

$$P = HD$$

und D ist invariant vom Grad 60. Nach Lemma 26.3 ist der Raum der invarianten Polynome vom Grad 60 zweidimensional. Die Polynome A^5, B^3, C^2 erzeugen diesen Raum, da sie paarweise linear unabhängig sind, was daraus folgt, dass sie (in $\mathbb{C}[U, V]$) aus unterschiedlichen Linearfaktoren zusammengesetzt sind. Daher ist $D \in \mathbb{C}[A, B, C]$ und dies gilt nach Induktionsvoraussetzung auch für H.

Weiterhin folgt aus der Zweidimensionalität der sechzigsten Stufe des Invariantenringes, dass eine Relation der Form

$$\alpha A^5 + \beta B^3 + \gamma C^2 = 0$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ vorliegen muss, was den Isomorphietyp des Ringes bereits bestimmt.

Wir geben noch die invarianten Polynome zu den Halbachsen an, und zwar geben wir homogene invariante Polynome vom Grad $12, 20, 30$ an, wobei wir die Invarianz nur exemplarisch überprüfen. Wir setzen

$$\tilde{A} = U^{11}V + 11U^6V^6 - UV^{11},$$

$$\tilde{B} \;=\; U^{20} - 228U^{15}V^5 + 494U^{10}V^{10} - 228U^5V^{15} + V^{20}$$

und

$$\tilde{C} \;=\; U^{30} + 522U^{25}V^5 - 10005U^{20}V^{10} - 10005U^{10}V^{20} + 522U^5V^{25} + V^{30}.$$

Wenn man nachweist, dass diese Polynome invariant sind, so muss wegen $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathbb{C}[A,B,C]$ und aus Gradgründen (bis auf Skalierung) $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = B$ und $\tilde{C} = C$ gelten. Die erzeugenden Matrizen

$$E = -\begin{pmatrix} \xi^3 & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix} \text{ und } F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix}$$

(wobei ξ eine primitive 5-te komplexe Einheitswurzel sei) der binären Ikosaedergruppe wirken durch

$$U \mapsto -\xi^3 U,\; V \mapsto -\xi^2 V$$

bzw.

$$U \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \left((-\xi + \xi^4)U + (\xi^2 - \xi^3)V\right),\; V \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\xi^2 - \xi^3)U + (\xi - \xi^4)V\right) .$$

Es ist

$$\begin{aligned} (\tilde{A})E &= (U^{11}V + 11U^6V^6 - UV^{11})E \\ &= (-\xi^{33})(-\xi^2)U^{11}V + 11(\xi^{18}\xi^{12})U^6V^6 - (-\xi^3)(-\xi^{22})UV^{11} \\ &= U^{11}V + 11U^6V^6 - UV^{11} \end{aligned}$$

und (mit einer aufwändigen Rechnung)

$$\begin{aligned} (\tilde{A})F &= (U^{11}V + 11U^6V^6 - UV^{11})F \\ &= U^{11}V + 11U^6V^6 - UV^{11}. \end{aligned}$$

Zwischen diesen invarianten Polynomen besteht, wie eine aufwändige Rechnung zeigt, die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{C}^2 - \tilde{B}^3 - 1728\tilde{A}^5 &= \left(U^{30} + 522U^{25}V^5 - 10005U^{20}V^{10} - 10005U^{10}V^{20} + 522U^5V^{25} + V^{30}\right)^2 \\ &\quad - \left(U^{20} - 228U^{15}V^5 + 494U^{10}V^{10} - 228U^5V^{15} + V^{20}\right)^3 \\ &\quad -1728\left(U^{11}V + 11U^6V^6 - UV^{11}\right)^5 \\ &= U^{55}V^5\,(1044 + 684 - 1728) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Dies überprüft man, indem man die Koeffizienten zu den Monomen $U^{5i}V^{5j}$, $i + j = 12$, berechnet. Da diese Relation irreduzibel ist, liegt die Isomorphie

$$\mathbb{C}[U,V]^{BI} \;=\; \mathbb{C}[\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}]/(\tilde{C}^2 - \tilde{B}^3 - 1728\tilde{A}^5)$$

vor. Nach Umbenennung und Streckung der Variablen ist dieser Ring isomorph zu $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$.

Diesen Invariantenring bezeichnet man als E_8-*Singularität*.

Satz 26.5. *Der Restklassenring* $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ *ist faktoriell.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 26.2, Beispiel 26.4 und Korollar 12.9. $\square$

Bemerkung 26.6. Die Komplettierung des Ringes $R = \mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ am maximalen Ideal R_+ ist $\hat{R} = \mathbb{C}[[X,Y,Z]]/(X^2+Y^3+Z^5)$. Dieser Ring ist ebenfalls faktoriell (die Komplettierung eines faktoriellen Ringes muss im Allgemeinen nicht faktoriell sein). Es gilt sogar, dass dieser Ring der einzige zweidimensionale komplette Ring (bis auf Isomorphie) über $\mathbb{C}$ ist, der faktoriell, aber nicht regulär, also nicht der Potenzreihenring $\mathbb{C}[[X,Y]]$ ist.