Fachbereich Mathematik/Informatik **8. Dezember 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender II

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
Mögliche Punkte	4	4	4	2	8	4	4	5	4	3	6	11	5	64
Erhaltene Punkte														

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *Norm* eines Vektors $v \in V$ auf einem reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$.
(2) Eine *Orthonormalbasis* in einem euklidischen Vektorraum V.
(3) Ein *homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.
(4) Die *Faser* zu einer Abbildung
$$\varphi : L \longrightarrow M$$
über einem Punkt $y \in M$.
(5) Das *totale Differential* in einem Punkt $P \in V$ einer in diesem Punkt total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
(dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).
(6) Ein *kritischer Punkt* $P \in \mathbb{R}^n$ einer total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$
(7) Eine bezüglich einem Punkt $P \in T$ *sternförmige Menge* $T \subseteq \mathbb{R}^n$.
(8) Die *Laplace-Ableitung* einer zweimal differenzierbaren Funktion
$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Das *Folgenkriterium für die Stetigkeit* in einem Punkt $x \in L$ zu einer Abbildung
$$\varphi : L \longrightarrow M$$
zwischen metrischen Räumen L und M.
(2) Die *Mittelwertabschätzung* für eine differenzierbare Kurve
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
(3) Der *Lösungsansatz für Zentralfelder*. Man beschränke sich auf Zentralfelder der Form
$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v)v$$
zu einer stetigen Funktion
$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(4) Die *Formel für das Volumen* einer kompakten Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ unter einer linearen Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 4. (2 ($4 \cdot 0{,}5$) Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$B_0(t) = (1-t)^2,\ B_1(t) = 2t(1-t) \text{ und } B_2(t) = t^2\,.$$

Es seien $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Wir definieren die Kurve

$$f(t) := B_0(t)v_0 + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2.$$

a) Berechne $f(0)$ und $f(1)$.

b) Berechne $f'(t)$.

c) Zeige, dass $f'(0)$ ein Vielfaches von $v_1 - v_0$ und $f'(1)$ ein Vielfaches von $v_2 - v_1$ ist.

d) Skizziere für $v_0 = (0,1)$, $v_1 = (1,1)$ und $v_2 = (2,0)$ das Bild der Kurve $f(t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

In der folgenden Aufgabe darf elementargeometrisch argumentiert werden.

Aufgabe 5. (8 (4+4) Punkte)

Wir betrachten die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ ohne den offenen Kreis mit Mittelpunkt $M = (0,0)$ und Radius 3, also

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{x^2+y^2} \geq 3\right\}.$$

Eine Person befindet sich im Punkt $A = (5,0)$ und möchte zum Punkt $B = (-5,0)$, wobei sie sich nur in T bewegen darf.

a) Zeige, dass die Person von A nach B entlang von zwei geraden Strecken kommen kann, deren Gesamtlänge $12,5$ ist.

b) Zeige, dass die Person von A nach B entlang eines stetigen Weges kommen kann, dessen Gesamtlänge maximal $11,9$ ist.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Bestimme die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto e^t x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mit $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 x - xy \\ t^3 + x^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x(0) = 1 \text{ und } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 4.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = e^x y z^2 - xy,$$

im Punkt $(1,0,-1)$.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Begründe ohne Differentialrechnung, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 - y^2,$$

kein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 11. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt $P = (x,y,z)$ genau dann ein regulärer Punkt von F ist, wenn die Koordinaten von P paarweise verschieden (also $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$) sind.

Aufgabe 12. (11 (4+7) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^4.$$

a) Bestimme zu jedem Punkt $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ das Volumen des Körpers

$$K = \left\{ (x,y,z \in \mathbb{R}^3 |\, r \leq x \leq r+1,\ s \leq y \leq s+1,\ 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}.$$

b) Zeige, dass das (von (r,s) abhängige) Volumen aus Teil a) in genau einem Punkt (r,s) minimal ist (dieser Punkt muss nicht explizit angegeben werden).

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Die rechteckige Grundseite (Unterseite) eines Bootes (unter Wasser) habe die Breite 2m und die Länge 10m, die (ebenfalls rechteckige) Deckseite (Oberseite) habe die Breite 3m und die Länge 12m, wobei die Seiten parallel zueinander seien und den Abstand 2m besitzen. Die vier übrigen Seiten seien ebene Verbindungen zwischen Ober- und Unterseite. Das Boot wiegt mit Besatzung, aber ohne Ladung 12.000kg. Der Tiefgang des Bootes soll maximal $1,5$m betragen. Mit welcher Masse kann das Boot maximal beladen werden?

Hilfsmittel

$$\arcsin(0,6) \;=\; 0,643501109...$$