Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 4

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der linearen Kongruenz $12x = 3 \mod 21$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Bestimme den Rest von 27! modulo 31.

Aufgabe 3. (1 bis 4 Punkte)

Gehe auf die Seite

Operationstafeln für Restklassenringe von Z

und erstelle für einen der angeführten Restklassenringe $\mathbb{Z}/(n)$ im entsprechenden Link Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation (kategorisiere!).

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Formuliere und beweise (bekannte) Teilbarkeitskriterien für Zahlen im Dezimalsystem für die Teiler $k = 2, 3, 5, 9, 11$.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p ist für jede ganze Zahl a.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Sei $n \geq 2$ keine Primzahl. Zeige, dass das Potenzieren

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)\,, a \longmapsto a^n\,,$$

kein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobenius-Homomorphismus* nennt.
Tipp: benutze Aufgabe 3.2.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/(p)$ vom Grad $d \geq p$. Zeige, dass es ein Polynom $g(x)$ mit einem Grad $< p$ gibt derart, dass für alle Elemente $a \in \mathbb{Z}/(p)$ die Gleichheit

$$f(a) = g(a)$$

gilt.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Sei $f(x) = x^7+2x^3+3x+4 \in (\mathbb{Z}/(5))[x]$. Finde ein Polynom $g(x) \in (\mathbb{Z}/(5))[x]$ vom Grad < 5, das für alle Elemente aus $\mathbb{Z}/(5)$ mit $f(x)$ übereinstimmt.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

(a) Bestimme für die Zahlen 2, 3 und 7 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7)$$

die Restetupel $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung a der Kongruenzen

$$a = 1 \mod 2,\ a = 2 \mod 3 \text{ und } a = 2 \mod 7\,.$$