Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 13

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 13.1.

Aufgabe 13.2. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 13.3. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 13.4. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 13.5. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $c \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit $x_0 = c$ und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 13.6. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n := \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

AUFGABE 13.7. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

AUFGABE 13.8. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

AUFGABE 13.9. Sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge x^n, $n \in \mathbb{N}$, bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

AUFGABE 13.10. Man gebe ein Beispiel einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 13.11. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

AUFGABE 13.12. (5 Punkte)

Es seien $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 13.13. (4 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

AUFGABE 13.14. (6 Punkte)

Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n \,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n \,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

AUFGABE 13.15. (2 Punkte)

Zeige, dass die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞ ist.

AUFGABE 13.16. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Weihnachtsaufgabe

Die folgende Aufgabe soll bis zum 4.1.2012 (getrennt von den anderen Aufgaben) abgegeben werden. Die erreichten Punkte fließen zusätzlich auf Ihr Punktekonto.

Aufgabe 13.17. (10 Punkte)

In einem weihnachtlich geschmückten Raum befinden sich $n \geq 4$ Personen, die wichteln wollen. D.h. für jede Person A muss eine weitere Person $B \neq A$ bestimmt werden, für die A ein Geschenk besorgen soll.[1] Jede Person darf nur wissen (und weiß), wen sie beschenken soll, und keine Person darf mehr wissen.[2] Die Personen bleiben die ganze Zeit im Raum, sie schauen nicht weg oder Ähnliches. Es stehen allein Papier und Stifte zur Verfügung. Mischen ist erlaubt, d.h. man darf „zufällige" Permutationen von optisch gleichen Objekten vornehmen, und diese sind nicht rekonstruierbar. Es darf gelost werden und dabei darf eine gezogene Information verdeckt gelesen werden. Zettel dürfen (auch heimlich) beschrieben werden.

Entwerfe ein einmalig durchzuführendes Verteilungsverfahren, das all diese Bedingungen erfüllt.

---

[1] Dabei soll jede Person genau ein Geschenk bekommen.

[2] Dies soll auch bedeuten, dass für jede Person alle anderen Personen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit als Schenker in Frage kommen.