Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 4.1. Untersuche für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

auf Injektivität und Surjektivität.

AUFGABE 4.2. Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

AUFGABE 4.3. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

AUFGABE 4.4. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G : M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die $F \circ G = \mathrm{id}_M$ und $G \circ F = \mathrm{id}_L$ erfüllt. Zeige, dass dann G die Umkehrabbildung von F ist.

AUFGABE 4.5. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

AUFGABE 4.6.*

Es seien L, M, N und P Mengen und es seien

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und
$$H : N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$
Abbildungen. Zeige, dass dann
$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$
gilt.

Aufgabe 4.7.*

Seien L, M, N Mengen und
$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$
Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung
$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$
Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 4.8. Es seien
$$f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
Funktionen, die wachsend oder fallend seien, und sei $f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ ihre Hintereinanderschaltung. Es sei k die Anzahl der fallenden Funktionen unter den f_i. Zeige, dass bei k gerade f wachsend und bei k ungerade f fallend ist.

Aufgabe 4.9. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt
$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i)\,.$$

Aufgabe 4.10. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$.
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 4.11. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich null sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 4.12. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung
$$\psi : K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$
folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 4.13. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom
$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$
die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 4.14. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 4.15. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung
$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$
mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 4.16. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 4.17. Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 4.18. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen
$$f = g/h : U \longrightarrow \mathbb{R},$$
wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

(1) $1/x$,
(2) $1/x^2$,
(3) $1/(x^2 + 1)$,
(4) $x/(x^2 + 1)$,
(5) $x^2/(x^2 + 1)$,
(6) $x^3/(x^2 + 1)$,
(7) $(x - 2)(x + 2)(x + 4)/(x - 1)x(x + 1)$.

Aufgabe 4.19. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.20. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Aufgabe 4.21. (2 Punkte)

Zeige, dass eine streng wachsende Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe 4.22. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 4.23. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i)$.

Aufgabe 4.24. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 4.25. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.