Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 9

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{A}^2_K \supseteq D(s) \longrightarrow \mathbb{A}^3_K,\ (s,t) \longmapsto (s, t^2/s, t) = (x,y,z)\,.$$

Bestimme eine algebraische Gleichung F für das Bild. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Vergleiche diese Abbildung mit den in Aufgabe 6.4 diskutierten Abbildungen.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Bestimme für die in Beispiel 8.5 berechnete Trajektorie die Koordinaten der Punkte, wo die Kurve singulär ist.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei

$$K[X_n,\, n \in \mathbb{N}]\,,$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen. Zeige, dass das Gleiche gilt für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X, Y, Z, W]/(XY - ZW, 5X^8 - YZ^3 + 2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $A = K[X, Y]$. Finde eine K-Unteralgebra von A, die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Zeige, dass für affin-algebraische Mengen $V, V' \subseteq \mathbb{A}_K^n$ die Beziehung der affin-linearen Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Es seien $F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Diskutiere, wie sich die verschiedenen Äquivalenzbegriffe aus der siebten Vorlesung für F und G (und für $V(F)$ und $V(G)$) unter dem Körperwechsel verhalten.