Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Zeige, dass die Isotropiegruppen zu zwei äquivalenten Elementen $x, y \in M$ in natürlicher Weise isomorph sind.

Aufgabe 22.2. Betrachte den Beweis zu Lemma 22.2 mit der dortigen Notation. Begründe die folgenden Aussagen.

(1) Eine eigentliche Isometrie mit zwei Fixachsen ist die Identität.
(2) G ist die Vereinigung aller G_H.
(3) Sei $g \neq \mathrm{id}$. Das Element g kommt in genau zwei der G_H vor. In welchen?
(4) Die Halbachsenklasse K_i enthält n/n_i Elemente.

Aufgabe 22.3. Überprüfe die Formel

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{n_i}\right)$$

für den Oktaeder, den Dodekaeder und den Ikosaeder.

Aufgabe 22.4. Sei G eine Gruppe, M eine Menge und

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),\ g \longmapsto \sigma_g,$$

ein Gruppenhomomorphismus in die Permutationsgruppe von M. Zeige, dass dies in natürlicher Weise einen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(\mathfrak{P}(\mathrm{M}))\,,\ g \longmapsto (N \mapsto g(N)),$$

in die Permutationsgruppe der Potenzmenge induziert.

Aufgabe 22.5. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit $(1,0)$ als einem Eckpunkt. Bestimme die (eigentlichen und uneigentlichen) Matrizen, die den Symmetrien an diesem Dreieck entsprechen.

Aufgabe 22.6. Bestimme sämtliche Matrizen, die den Symmetrien eines Quadrates mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$ entsprechen. Sehen diese Matrizen für jedes Quadrat (mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt) gleich aus?

Aufgabe 22.7. Zeige, dass sich jede endliche Gruppe als Untergruppe der $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ realisieren lässt.

Aufgabe 22.8. Man gebe ein Beispiel einer Raumdrehung, bei der sämtiche Matrixeinträge $\neq 0, 1$ sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.9. (4 Punkte)

Es seien A_1, A_2, A_3 und A_4 vier Geraden im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt mit der Eigenschaft, dass keine drei davon in einer Ebene liegen. Es sei

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare, eigentliche Isometrie mit $f(A_i) = A_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Zeige, dass f die Identität ist. Man gebe ein Beispiel an, dass diese Aussage ohne die Ebenenbedingung nicht gilt.

Aufgabe 22.10. (4 Punkte)

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Drehungen um die x-Achse, die y-Achse und die z-Achse mit den Ordungen n_1, n_2, n_3 (φ_1 ist also eine Drehung um den Winkel $360/n_1$ Grad um die x-Achse, etc.). Es sei $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Für welche Tupel (n_1, n_2, n_3) ist die von diesen drei Drehungen erzeugte Gruppe endlich?

Aufgabe 22.11. (3 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen A_n besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.