Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 4

Induzierte Darstellungen

PROPOSITION 4.1. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V. Durch diese Operation werden folgende lineare Operationen induziert.

(1) *Die Operation auf dem k-ten Produkt*[1] *von V mit sich selbst, also*
$$G \times V^k \longrightarrow V^k,\ (\sigma, v_1, \ldots, v_k) \longmapsto (\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_k)).$$
(2) *Die Operation auf dem k-ten Dachprodukt $\bigwedge^k V$, also*
$$G \times \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^k V,$$
die durch $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto \sigma(v_1) \wedge \ldots \wedge \sigma(v_k)$ festgelegt ist.
(3) *Die duale Operation (von rechts) auf dem Dualraum V^*, also die Abbildung*
$$V^* \times G \longrightarrow V^*,\ (f, \sigma) \longmapsto f \circ \sigma.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4.1. □

Lineare Operationen und der Polynomring

Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X (beispielsweise einem Vektorraum) operiere. Es sei K ein Körper und

$$f\colon X \longrightarrow K$$

eine beliebige Funktion mit X als Definitionsbereich und K als Zielbereich. Die Menge dieser Funktionen bilden einen kommutativen Ring, wobei je zwei Funktionen addiert oder multipliziert werden, indem an jedem Punkt $x \in X$ die Werte dieser Funktion addiert bzw. multipliziert werden. Zu $\sigma \in G$, aufgefasst als Bijektion

$$\sigma\colon X \longrightarrow X,$$

ergibt sich die neue Funktion

$$X \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} K\,,$$

[1]Diese Konstruktion lag schon Beispiel 1.1 zugrunde.

also $f \circ \sigma$. Die Gruppe operiert also auch auf dem Funktionenring, und zwar wegen

$$f \circ (\sigma\tau) = (f \circ \sigma) \circ \tau$$

von rechts. Zu diesem Übergang vergleiche auch Beispiel 2.25.

Auf einem K-Vektorraum sind die einfachsten Funktionen von V nach K die Linearformen. Wenn eine Gruppe G linear auf V operiert, so ist die Zuordnung (vergleiche Proposition 4.1)

$$V^* \times G \longrightarrow V^*,\ (f, \sigma) \longmapsto f \circ \sigma,$$

selbst K-linear.

Bei $V = K^n$ bilden die Projektionen p_i, wobei die Projektion p_i ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ auf seine i-te Komponente x_i abbildet, eine Basis von V^* (die sogenannte *Dualbasis*). Ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ aus dem Polynomring in n Variablen über K kann man direkt als eine Funktion (die zugehörige *Polynomfunktion*) von K^n nach K interpretieren, indem man in das Polynom das Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ einsetzt, bzw. die Variable X_i als die i-te Projektion p_i interpretiert.

Man möchte nun jedem endlichdimensionalen K-Vektorraum V einen Polynomring $K[V]$ zuordnen, dessen Elemente man als K-wertige Funktionen auf V auffassen kann. Da es stets eine lineare Isomorphie $V \cong K^n$ gibt, wird es auch einen K-Algebraisomorphismus $K[V] \cong K[X_1, \ldots, X_n]$ geben.

Definition 4.2. Es sei K ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man nennt die von allen formalen Monomen $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m$, wobei die f_i Linearformen auf V sind, symbolisch erzeugte kommutative K-Algebra, die die linearen Beziehungen zwischen den Linearformen respektiert, den *Polynomring* zu V. Er wird mit

$$K[V]$$

bezeichnet.

Bemerkung 4.3. Jedes Element in $K[V]$ besitzt eine Darstellung der Form

$$\sum_\nu a_\nu f_\nu$$

(mit endlicher Indexmenge), wobei $a_\nu \in K$ und f_ν ein formales Produkt aus Linearformen ist. In einem solchen Produkt sind wegen der geforderten Kommutativität die Faktoren vertauschbar. Da lineare Relationen zwischen den Linearformen respektiert werden müssen, folgt aus einer Gleichung

$$g = b_1 g_1 + \ldots + b_\ell g_\ell$$

für Linearformen $g, g_1, \ldots, g_\ell$ die Gleichung

$$g f_2 \cdots f_m = \sum_{j=1}^{\ell} b_j g_j f_2 \cdots f_m .$$

Wenn V n-dimensional ist und $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis von V^* ist, so lässt sich daher jedes Element aus $K[V]$ als Polynom in den f_i schreiben. Diese Darstellung ist auch eindeutig, da es in $K[V]$ nur Relationen gibt, die von einer linearen Relation herrühren, es solche aber in einer Basis nicht gibt. D.h. es gibt einen K-Algebraisomorphismus

$$K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K[V],\ X_i \longmapsto f_i.$$

Bemerkung 4.4. Es sei K ein unendlicher Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Dann lässt sich der Polynomring $K[V]$ auch als die von sämtlichen Linearformen erzeugte K-Unteralgebra von Abb (V, K) definieren. Dies beruht darauf, dass ein Polynom $\neq 0$ auf K^n (also als Polynomfunktion aufgefasst) nicht die Nullfunktion ist. Bei einem endlichen Körper ist dies nicht richtig, wie das Polynom $X^p - X$ über $\mathbb{Z}/(p)$ zeigt.

Definition 4.5. Es sei K ein Körper, V, W seien endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Den durch

$$\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$$

über $f_1 \cdots f_m \mapsto \varphi^*(f_1) \ldots \varphi^*(f_m)$ gegebenen K-Algebrahomomorphismus

$$K[W] \longrightarrow K[V]$$

nennt man *induzierten Algebrahomomorphismus.*

Bemerkung 4.6. Es sei

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m$$

eine lineare Abbildung, die durch eine $m \times n$-Matrix A gegeben sei. Dann wird der zugehörige K-Algebrahomomorphismus

$$K[Y_1, \ldots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]$$

durch $Y_j \mapsto \sum_{k=1}^n a_{jk} X_k$ gegeben. Nach Definition wird Y_j auf die Hintereinanderschaltung

$$K^n \xrightarrow{\varphi} K^m \xrightarrow{p_j} K$$

abgebildet. Diese schickt den i-ten Standardvektor e_i auf

$$p_j\left(\varphi(e_i)\right) = p_j\left(\sum_{k=1}^m a_{ki} e_k\right) = a_{ji}.$$

Durch diese Bedingungen ist aber gerade

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} p_k = \sum_{k=1}^n a_{jk} X_k$$

charakterisiert. Zu einer Linearform $\sum_{j=1}^m b_j Y_j$ berechnet man also das Bild $\sum_{i=1}^n c_i X_i$, indem man $c = A^{tr} b$ ausrechnet. Für ein beliebiges Polynom $F \in K[Y_1, \ldots, Y_m]$ ergibt sich ds Bild, indem man in F jedes Y_j durch den angegebenen Ausdruck ersetzt.

Definition 4.7. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V. Es sei $K[V]$ der Polynomring zu V. Die Operation der Gruppe G (von rechts) auf $K[V]$, die für jedes $\sigma \in G$ per Definition 4.5 durch die Zuordnung

$$V^* \longrightarrow V^*, \, f \longmapsto f \circ \sigma,$$

festgelegt ist, nennt man die *induzierte Operation auf dem Polynomring.*

Beispiel 4.8. Es sei K ein Körper. Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_n, die auf K^n linear operiert, indem $\sigma \in S_n$ den i-ten Standardvektor e_i auf $e_{\sigma(i)}$ schickt (wie in Beispiel 3.4). Diese Gruppenoperation induziert gemäß Definition 4.7 eine Operation auf dem Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$. Dabei wird X_i auf $X_{\sigma^{-1}(i)}$ geschickt! Abgesehen von diesem Invertieren ist diese Operation der S_n auf dem Polynomring nichts anderes als die in der ersten Vorlesung besprochene Operation.

Wenn eine Gruppe auf dem K^n durch Diagonalmatrizen operiert, wie in Beispiel 3.15 und Ähnlichen, so erübrigt sich das Transponieren, wenn man zur zugehörigen Operation auf dem Polynomring übergeht.

Beispiel 4.9. Auf einem K-Vektorraum V operiert die Einheitengruppe $K^\times$ durch skalare Multiplikation. Die entsprechende Operation auf dem Polynomring $K[V]$ ist für $\lambda \in K^\times$ durch $f \mapsto \lambda f$ für eine Linearform f gegeben. Ein Produkt $f_1 \cdots f_d$ von Linearformen wird auf $\lambda^d f_1 \cdots f_d$ abgebildet.

Beispiel 4.10. Es sei K ein Körper, der eine r-te primitive Einheitswurzel ζ besitzt. Wir betrachten die in Beispiel 3.13 beschriebene Operation von

$$\mathbb{Z}/(r) \cong \mu_r(K)$$

auf K durch skalare Multiplikation. Die zugehörige Operation auf dem Polynomring $K[X]$ ist dadurch gegeben, dass $\zeta^i \in \mu_r(K)$ durch $X \mapsto \zeta^i X$ wirkt. Somit wird eine Potenz X^j auf $\zeta^{ij} X^j$ abgebildet. Insbesondere ist das Polynom X^r fix unter dieser Gruppenoperation.

Zu einem Vektorraum V ist der Polynomring $K[V]$ in natürlicher Weise[2] $\mathbb{N}$-graduiert, und zwar besteht die d-te Stufe aus Linearkombinationen von Produkten der Form $f_1 \cdots f_d$, wobei die f_j Linearformen sind.

Lemma 4.11. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und*

$$G \times V \longrightarrow V$$

[2]Die Formulierung „in natürlicher Weise“ kann man an dieser Stelle gut erläutern. Die angesprochene $\mathbb{N}$-Graduierung von $K[V]$ besteht unabhängig und ohne Bezug auf eine Basis. Man kann einen Polynomring auch mit einer $\mathbb{Z}^n$-Graduierung versehen, doch ist dies abhängig von einer gewählten Basis.

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V. Dann ist die induzierte Operation auf dem Polynomring $R = K[V]$ homogen, d.h. für jedes $\sigma \in G$ und $f \in R_d$ ist auch $f\sigma \in R_d$.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.2. □

Die Stufen R_d sind also G-invariante Untervektorräume von R.

Invariantenringe

Da eine Operation einer Gruppe von links auf einem geometrischen Objekt in natürlicher Weise zu einer Operation von rechts auf dem Ring der Funktionen führt, werden wir im Folgenden die Operationen auf einem Ring generell von rechts schreiben.

DEFINITION 4.12. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiert (von rechts). Dann bezeichnet man

$$R^G = \{f \in R |\, f\sigma = f \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

als den *Invariantenring* (oder *Fixring*) von R unter der Operation von G.

Das ist in der Tat wieder ein Ring, ein Unterring von R. Die 0 und die 1 sind invariant, da alle $\sigma \in G$ als Ringautomorphismen operieren. Ebenso ist mit invarianten Funktionen $f, g \in R^G$ auch das Negative $-f$, deren Summe $f+g$ und deren Produkt fg invariant.

BEMERKUNG 4.13. Es sei R eine kommutative K-Algebra über einem Körper und es sei G eine Gruppe, die als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere. Zu jedem $\sigma \in G$ sei also

$$\sigma\colon R \longrightarrow R$$

ein K-Algebrahomomorphismus. Dann ist $K \subseteq R^G$ und der Fixring R^G ist selbst eine K-Algebra. Zu einer linearen Operation von G auf einem K-Vektorraum V ist die zugehörige Operation von G auf dem Polynomring $K[V]$ eine Operation als Gruppe von K-Automorphismen.

LEMMA 4.14. *Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Für die Einheiten gilt*

$$\left(R^G\right)^\times = R^G \cap R^\times .$$

(2) *Wenn R ein Körper ist, so ist auch R^G ein Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 4.4. □

Lemma 4.15. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und*

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V. Dann ist der Fixring $R^G \subseteq R = K[V]$ der induzierten Operation auf dem Polynomring $K[V]$ ein $\mathbb{N}$-graduierter Unterring. Dabei ist

$$\left(R^G\right)_d = (R_d)^G,$$

die d-te Stufe des Fixringes ist der Fixraum der induzierten Operation auf der d-ten Stufe des Polynomringes.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.1. □

In diesem Fall ist also die Bestimmung des Fixringes gleichbedeutend mit der Bestimmung des Fixraumes zu $K[V]_d$ für jedes $d \in \mathbb{N}$.

Beispiel 4.16. Es sei K ein Körper, der eine r-te primitive Einheitswurzel ζ besitzt. Wir betrachten die Operation von $\mu_r(K)$ auf K und auf $K[X]$ durch skalare Multiplikation (siehe Beispiel 3.13 und Beispiel 4.10). Der Fixring zu dieser Operation ist $K[X^r]$. Dazu muss man nur die Wirkungsweise des Erzeugers ζ der Gruppe verstehen und nach Lemma 4.15 muss man nur die (eindimensionalen) homogenen Stufen $K[X]_d = K \cdot X^d$ betrachten. Die induzierte Operation ist $X^d \mapsto \zeta^d X^d$. Dies ist genau dann die Identität, wenn d ein Vielfaches von r ist. Daher bilden die Stufen $K[X]_{md}$ den Invariantenring.

Beispiel 4.17. Zur natürlichen Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf K^n bzw. auf $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist der Fixring

$$K[X_1, \ldots, X_n]^{S_n} = K[E_1, \ldots, E_n],$$

wobei die E_i die elementarsymmetrischen Polynome sind. Dies ist die Existenzaussage von Satz 1.7; die dortige Eindeutigkeitsaussage bedeutet, dass der Fixring isomorph zu einem Polynomring in n Variablen ist.

Bemerkung 4.18. Die Elemente eines Polynomrings $K[V]$ zu einem K-Vektorraum V kann man als Funktionen von V nach K auffassen. Wenn eine lineare Operation einer Gruppe G auf V vorliegt, so ist ein Element $f \in K[V]^G \subseteq K[V]$ eine invariante Funktion von V nach K im Sinne von Definition 2.21. Zu $\sigma \in G$ und $v \in V$ ist ja

$$f(\sigma(v)) = (f\sigma)(v) = f(v).$$

Wenn K unendlich ist, so gilt hiervon auch die Umkehrung, d.h. ein Polynom $f \in K[V]$, das aufgefasst als Funktion auf V invariant ist, gehört zum Invariantenring $K[V]^G$, siehe Aufgabe 4.13. Bei endlichem K muss die Umkehrung nicht gelten, siehe Beispiel 4.19. Wir werden später sehen, dass es zu jedem kommutativen Ring einen topologischen Raum gibt, auf dem man Elemente des Invariantenringes zu einer Gruppenoperation als invariante Abbildungen auffassen kann.

Beispiel 4.19. Wir betrachten die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe $G = S_2 \cong \mathbb{Z}/(2)$ auf $V = (\mathbb{Z}/(p))^2$ $(p \geq 3)$, das nichttriviale Element vertauscht die Komponenten (das entspricht der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$bzw.) $X \longleftrightarrow Y$. Wegen

$$f \,=\, XY^p - X^pY \,=\, X\left(Y^p - Y\right) - Y\left(X^p - X\right)$$

ist dieses Polynom, aufgefasst als Funktion auf V, die Nullfunktion und somit insbesondere G-invariant. Dagegen ist f kein symmetrisches Polynom und gehört nicht zu $\mathbb{Z}/(p)[X, Y]^G$.