**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2010/2011**

# Mathematik III

## Arbeitsblatt 67

### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 67.1. Es seien $[a, b[$ und $[c, d[$ zwei halboffene Intervalle (mit $a \leq b$ und $c \leq d$). Beschreibe den Durchschnitt $[a, b[\cap[c, d[$ als eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

AUFGABE 67.2. Es sei $\mathcal{M}$ das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, abgeschlossenen, einseitig halboffenen, leeren, beschränkten oder unbeschränkten reellen Intervallen besteht. Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine Mengen-Algebra ist.

AUFGABE 67.3. Man gebe ein Beispiel für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, die man als eine abzählbare disjunkte Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben kann, aber nicht als eine endliche Vereinigung.

AUFGABE 67.4. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare beschränkte Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(T) < \infty$ ist.

AUFGABE 67.5. Es seien endlich viele linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben und es sei

$$P = \{a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k | \, a_i \in [0, 1]\}$$

das dadurch erzeugte Parallelotop. Zeige, dass $P$ beschränkt ist.

AUFGABE 67.6. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine nichtleere offene Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(U) > 0$ ist. Zeige ebenso, dass dies für abgeschlossene Mengen nicht gelten muss.

AUFGABE 67.7. Man gebe ein Beispiel für ein $\sigma$-endliches Maß $\mu$ auf $\mathbb{R}$ an, das auf allen Intervallen mit positiver Länge den Wert $\infty$ besitzt.

AUFGABE 67.8. Es seien $V$ und $W$ reelle Vektorräume und

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild eines Parallelotops wieder ein Parallelotop ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 67.9. (4 Punkte)

Zeige, dass sich eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ genau dann als eine endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben lässt, wenn dies mit endlich vielen disjunkten rechtsseitig halboffenen Intervallen möglich ist.

Aufgabe 67.10. (6 Punkte)

Es sei $\mathcal{V}$ der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von (rechtsseitig) halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Beweise folgende Aussagen.

(1) Die zu $V$ über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle
$$V = [a_1, b_1[ \uplus \ldots \uplus [a_n, b_n[$$
definierte Zahl
$$\mu(V) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$
ist wohldefiniert.

(2) Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.

Aufgabe 67.11. (5 Punkte)

Die *Cantor-Menge* ist definiert durch
$$C = \{\sum_{i=1}^{\infty} z_i 3^{-i} |\, z_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+\}\,.$$

a) Zeige, dass $C$ überabzählbar ist.

b) Zeige, dass $C$ eine Borel-Menge ist.

c) Zeige $\lambda^1(C) = 0$.

Die Cantor-Menge ist das Endprodukt des in dieser Skizze angedeuteten Ausdünnungsprozesses.

Aufgabe 67.12. (6 Punkte)

Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass das von diesen Vektoren erzeugte Parallelotop einen achsenparallelen Würfel (mit positiver Länge) enthält.

Aufgabe 67.13. (12 Punkte)

Es sei $\mu$ ein Maß auf dem $\mathbb{R}^n$, das für alle offenen Bällen $U(P,r)$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß übereinstimmt. Zeige $\mu = \lambda^n$.

(Für den zweidimensionalen Fall gibt es 10 Punkte.)

# Abbildungsverzeichnis