Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2009/2010

Mathematik I

Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Zeige, dass T genau dann kompakt und zusammenhängend ist, wenn T ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

Aufgabe 22.2. Es sei

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 22.3. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 22.4. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x < \sqrt{2}\,, \\ 1\,, \text{ falls } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 22.5. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2. Zeige, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 22.6. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Die nächste Aufgabe verwendet folgende Definition.

Es sei
$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$
eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ gibt mit
$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$
für alle $x, y \in L$.

Aufgabe 22.7. Es sei
$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$
eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M, die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Die nächsten Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung. Dann nennt man
$$\| \varphi \| := \sup \left(\| \varphi(v) \|, \| v \| = 1 \right)$$
die *Norm* von φ.

Aufgabe 22.8. Begründe, warum die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen wohldefiniert ist.

Aufgabe 22.9. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$, $\| v \| = 1$, gibt mit
$$\| \varphi(v) \| = \| \varphi \| \ .$$

Aufgabe 22.10. Zeige, dass die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) Es ist $\| \varphi(v) \| \leq \| \varphi \| \cdot \| v \|$.
(2) Es ist $\| \varphi \| = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$ ist.
(3) Es ist $\| c\varphi \| = | c | \cdot \| \varphi \|$.
(4) Es ist $\| \varphi_1 + \varphi_2 \| \leq \| \varphi_1 \| + \| \varphi_2 \|$.

Aufgabe 22.11. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass die Abschätzung
$$| \lambda | \leq \| \varphi \|$$
gilt.

Aufgabe 22.12. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 22.13. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild einer offenen Menge nicht offen sein muss.

Aufgabe 22.14. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass das Bild einer abgeschlossenen Menge nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 22.15. Sei X eine nichtleere Menge versehen mit der diskreten Metrik. Zeige, dass eine stetige Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow X$$

konstant ist.

Aufgabe 22.16. Skizziere die folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

(1) $1/x$,
(2) $1/x^2$,
(3) $1/(x^2 + 1)$,
(4) $x/(x^2 + 1)$,
(5) $x^2/(x^2 + 1)$,
(6) $x^3/(x^2 + 1)$,
(7) $(x - 2)(x + 2)(x + 4)/(x - 1)x(x + 1)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.17. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von φ existiert. Zeige, dass

$$|| \varphi ||= \max (| \lambda |, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi)$$

gilt.

Aufgabe 22.18. (3 Punkte)

Betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei der $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen sei. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Norm von φ.

Aufgabe 22.19. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung $\neq 0$. Bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto |\, \varphi(v) \,|,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von φ.

Aufgabe 22.20. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 22.21. (4 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befindet sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

Aufgabe 22.22. (6 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige, dass durch

$$d_T(x) := \inf_{y \in T} d(x, y)$$

eine wohldefinierte, stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe 22.23. (6 Punkte)

Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ sei mit der euklidischen, der Summen- oder der Maximumsmetrik versehen. Bestimme, abhängig von der gewählten Metrik, die maximale Anzahl von Punkten $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ derart, dass die Metrik auf der Teilmenge $T = \{P_1, \ldots, P_n\}$ die diskrete Metrik induziert.