

## Mathematik für Anwender II

### Vorlesung 32

#### Metrische Räume

Euklidische Räume besitzen nach Definition ein Skalarprodukt. Darauf aufbauend kann man einfach die Norm eines Vektors und den Abstand zwischen zwei Vektoren definieren. Die wichtigsten Eigenschaften dieses euklidischen Abstandes werden im Begriff der *Metrik* bzw. des *metrischen Raumes* axiomatisiert.

DEFINITION 32.1. Sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle  $x, y, z \in X$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  (Definitheit),
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie), und
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(M, d)$ , wobei  $M$  eine Menge und  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik ist.

Man kann leicht aus den Bedingungen folgern, dass eine Metrik nur nichtnegative Werte annimmt. Der Wert  $d(x, y)$  gibt den Abstand der Punkte  $x$  und  $y$  bezüglich  $d$  an. Oft wird die Metrik nicht in der Notation erwähnt, obwohl es Situationen gibt, in denen verschiedene Metriken auf ein- und derselben Menge betrachtet werden.

BEISPIEL 32.2. Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

$$d(v, w) := \|v - w\| := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

der zugehörige Abstand. Dieser besitzt nach Lemma 31.10 die Eigenschaften einer Metrik. Insbesondere ist im  $\mathbb{R}^n$  der durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

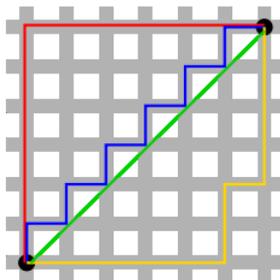
gegebene *euklidische Abstand* eine Metrik.

Wenn wir nichts anderes sagen, so verstehen wir den  $\mathbb{R}^n$  und den  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  stets mit dem euklidischen Abstand. Insbesondere sind die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  mit der durch den Betrag definierten Metrik ein metrischer Raum.

BEISPIEL 32.3. Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

eine Metrik, die man die *Summenmetrik* nennt.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen den Summenabstand.

BEISPIEL 32.4. Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$d(x, y) = \max(|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n)$$

eine Metrik, die man die *Maximumsmetrik* nennt.

BEISPIEL 32.5. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

$$d_T(x, y) := d(x, y) \text{ für alle } x, y \in T$$

setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

BEISPIEL 32.6. Zu einer beliebigen Menge  $M$  kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{bei } x = y, \\ 1 & \text{bei } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

DEFINITION 32.7. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in M$  und  $\epsilon > 0$  eine positive reelle Zahl. Es ist

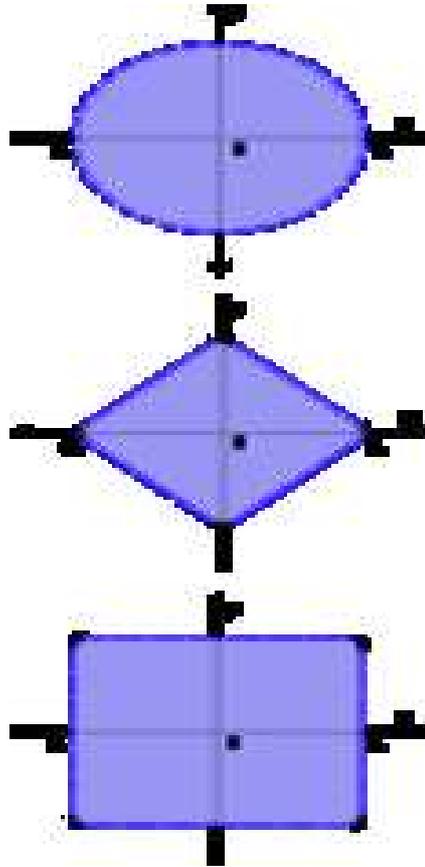
$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene* und

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

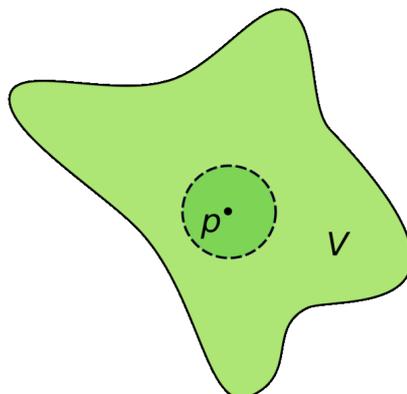
die *abgeschlossene  $\epsilon$ -Kugel* um  $x$ .

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Metrik. Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $U(x, \epsilon)$  einfach das beidseitig offene Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ .



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Metrik ab.

### Offene Teilmengen



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.

DEFINITION 32.8. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq M$  heißt *offen* (in  $(M, d)$ ), wenn für jedes  $x \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U.$$

DEFINITION 32.9. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq M$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $M \setminus A$  offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist *nicht* das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge.

LEMMA 32.10. *Es sei  $M$  ein metrischer Raum und  $x \in M$  ein Punkt. Dann sind die offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$  offen und die abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $y \in U(x, \epsilon)$ , d.h. es ist  $d(x, y) < \epsilon$ . Wir setzen  $a = \epsilon - d(x, y) > 0$  und behaupten, dass  $U(y, a) \subseteq U(x, \epsilon)$  ist. Dazu sei  $z \in U(y, a)$ . Dann ist aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + a < \epsilon$$

und somit  $z \in U(x, \epsilon)$ . Für die zweite Behauptung siehe Aufgabe 32.21.  $\square$

LEMMA 32.11. *Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.*
- (2) *Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung*

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

*offen.*

- (3) *Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt*

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

*offen.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 32.7.  $\square$

### Folgen in metrischen Räumen

Wir besprechen die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum. Eine Folge im  $\mathbb{R}^2$  ist beispielsweise durch

$$x_n = (\cos n, \sin n), n \in \mathbb{N}.$$

Es handelt sich um eine Folge, die sich auf dem Einheitskreis bewegt, und zwar dreht sich der Punkt um die Bogenlänge 1 (also um ca. 57,3 Grad). Die Folgenglieder nähern sich also nicht untereinander an, sodass keine Konvergenz zu erwarten ist. Bei der Folge

$$y_n = \left( \frac{1}{n} \cos n, \frac{1}{n} \sin n \right), n \in \mathbb{N},$$

bewegen sich die Glieder auf einer „gedachten Spirale“. Die Punkte drehen sich nach wie vor um den gleichen Winkel, allerdings wird der Abstand zum Nullpunkt immer kleiner, sodass man Konvergenz gegen 0 erwarten kann.

**DEFINITION 32.12.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Man sagt, dass die Folge gegen  $x \in M$  *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Beziehung

$$d(x_n, x) \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt  $x$  der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Diese Definition stimmt natürlich für  $M = \mathbb{R}$  mit unserem bisherigen Begriff für konvergente Folge überein.

**LEMMA 32.13.** *Der  $\mathbb{R}^m$  sei mit der euklidischen Metrik versehen und sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^m$  mit*

$$z_n = (z_{1n}, \dots, z_{mn}).$$

*Dann konvergiert die Folge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen  $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.*

*Beweis.* Sei die Gesamtfolge konvergent gegen  $z = (z_1, \dots, z_m)$ . Wir behaupten, dass die  $i$ -te Komponentenfolge  $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $z_i$  konvergiert. Sei (ohne Einschränkung)  $i = 1$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Gesamtfolge gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(z_n, z) \leq \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Daher ist

$$\begin{aligned} |z_{1n} - z_1| &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + (z_{2n} - z_2)^2 + \dots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &= d(z_n, z) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Seien nun alle Komponentenfolgen konvergent, wobei die  $i$ -te Folge den Grenzwert  $z_i$  besitzen möge, und sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir setzen  $z = (z_1, \dots, z_m)$  und behaupten, dass die Folge gegen  $z$  konvergiert. Zu  $\epsilon/m$  gibt

es für jede Komponentenfolge ein  $n_{0i}$  derart, dass  $|z_{in} - z_i| \leq \epsilon/m$  für alle  $n \geq n_{0i}$  gilt. Dann gilt für alle

$$n \geq n_0 = \max(n_{0i}, i = 1, \dots, m)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} d(z_n, z) &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + \dots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn die zugehörigen Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren.

Für eine konvergente reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  haben wir im ersten Semester die Eigenschaft kennengelernt, dass wenn sämtliche Folgenglieder  $\geq a$  sind, dass dann auch der Limes  $\geq a$  ist (für „ $>$ “ gilt das nicht). Die Hinrichtung der folgenden Aussage ist eine wesentliche Verallgemeinerung dieses Sachverhalts.

**SATZ 32.14.** *Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ , die in  $M$  konvergiert, bereits in  $T$  konvergiert.*

*Beweis.* Sei zunächst  $T$  abgeschlossen und eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$  gegeben, die in  $M$  gegen  $x \in M$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $x \in T$  ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann liegt  $x$  im offenen Komplement von  $T$  und daher gibt es ein  $\epsilon > 0$  derart, dass der gesamte  $\epsilon$ -Ball  $U(x, \epsilon)$  im Komplement von  $T$  liegt. Also ist

$$T \cap U(x, \epsilon) = \emptyset.$$

Da die Folge aber gegen  $x$  konvergiert, gibt es ein  $n_0$  derart, dass alle Folgenglieder  $x_n$ ,  $n \geq n_0$ , zu diesem Ball gehören. Da sie andererseits in  $T$  liegen, ist dies ein Widerspruch. Sei nun  $T$  nicht abgeschlossen. Wir müssen eine Folge in  $T$  konstruieren, die in  $X$  konvergiert, deren Grenzwert aber nicht zu  $T$  gehört. Da  $T$  nicht abgeschlossen ist, ist das Komplement  $U := X \setminus T$  nicht offen. D.h. es gibt einen Punkt  $x \in U$  derart, dass in jedem  $\epsilon$ -Ball von  $x$  auch Punkte außerhalb von  $U$ , also in  $T$  liegen. Insbesondere ist also für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_+$  der Durchschnitt

$$T \cap U\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset.$$

Wir wählen aus dieser Schnittmenge ein Element  $x_n$  und behaupten, dass die sich ergebende Folge die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst liegen nach Konstruktion alle Folgenglieder in  $T$ . Die Folge konvergiert gegen  $x$ , da man sich hierzu auf  $\epsilon = 1/n$  beschränken kann und alle Folgenglieder  $x_m$ ,  $m \geq n$ , in  $U(x, \frac{1}{m}) \subseteq U(x, \frac{1}{n})$  liegen. Da der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und  $x \notin T$  ist, konvergiert die Folge in  $T$  nicht.  $\square$

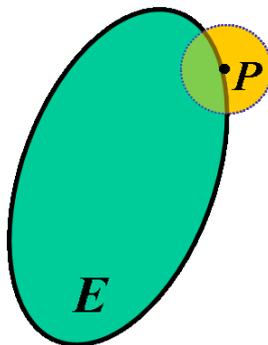
### Randpunkte

DEFINITION 32.15. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $x \in M$  heißt *Randpunkt* von  $T$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus  $T$  als auch Punkte aus  $M \setminus T$  enthält.

Die Menge aller Randpunkte von  $T$  heißt *Rand* von  $T$ , geschrieben  $\text{Rand}(T)$ .



BEISPIEL 32.16. Zu einem offenen (oder abgeschlossenen) Intervall  $]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  sind  $a$  und  $b$  die beiden Randpunkte. Zu einer offenen (oder abgeschlossenen) Kreisscheibe

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < r \right\}$$

ist die Kreislinie

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = r \right\}$$

der Rand.

DEFINITION 32.17. Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $a \in M$  heißt *Berührungspunkt* von  $T$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Ein Punkt ist genau dann ein Randpunkt von  $T$ , wenn er sowohl von  $T$  als auch vom Komplement  $M \setminus T$  ein Berührungspunkt ist.

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Manhattan distance.svg , Autor = Benutzer Psychonaut auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Unit disc.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Neighborhood illust1.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	4
Quelle = Neighborhood edge.png , Autor = Benutzer Zasdfgbnm auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	7