Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 20

Beweis der Hinrichtung

Wir kommen zum *Beweis der Hinrichtung* im Satz von Chevalley-Shephard-Todd, d.h. wir zeigen, dass eine Spiegelungsgruppe einen Polynomring als Invariantenring besitzt. Wir werden wiederholt mit partiellen formalen Ableitungen arbeiten. Diese verhalten sich wie die üblichen partiellen Ableitungen über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$.

Definition 20.1. Es sei K ein Körper. Zu einem Polynom

$$F = \sum_\nu a_\nu X^\nu \in K[X_1, \ldots , X_n]$$

und i, $1 \leq i \leq n$, heißt das Polynom

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} := \sum_\nu \nu_i a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_{i-1}^{\nu_{i-1}} X_i^{\nu_i -1} X_{i+1}^{\nu_{i+1}} \cdots X_n^{\nu_n}$$

die *formale partielle Ableitung* von F nach X_i.

Wir beweisen nun die Hinrichtung.

Beweis. Wir betrachten das Ideal $I_G \subseteq K[X_1, \ldots , X_n]$, das von allen homogenen invarianten Polynomen positiven Grades erzeugt wird. Es sei $I_G = (f_1, \ldots , f_m)$ ein homogenes minimales Erzeugendensystem für dieses Ideal. Aufgrund von Lemma 12.6 bilden diese $f_1, \ldots , f_m$ ein Algebraerzeugendensystem von $K[X_1, \ldots , X_n]^G$. Wir zeigen, dass die f_i algebraisch unabhängig sind und nehmen an, dass $g(f_1, \ldots , f_m) = 0$ ist mit $g \in K[Y_1, \ldots , Y_m]$, $g \neq 0$, ist. Sei dabei g von minimalem Grad.

Das Monom Y^ν aus g wird nach Einsetzen zu f^ν, was ein homogenes Polynom vom Grad $\sum_i \nu_i \operatorname{grad}(f_i)$ ist. Wir können daher annehmen, dass alle Monome, die in $g(f_1, \ldots , f_m)$ vorkommen, den gemeinsamen Grad d haben (die Monome, die zu einem anderen Grad führen, werden einfach weggelassen).

Wir betrachten

$$g_i := \frac{\partial g}{\partial y_i}(f_1, \ldots , f_m),$$

die zum Invariantenring $K[X_1, \ldots , X_n]^G$ gehören. Die g_i sind 0 oder sie haben den Grad $d - \operatorname{grad}(f_i)$. Da $g(y_1, \ldots , y_m)$ nicht konstant ist, ist

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(y_1, \ldots , y_m) \neq 0$$

für zumindest ein i, da wir Charakteristik 0 voraussetzen. Dann muss auch $g_i \neq 0$ für ein i sein, da g nach Annahme minimalen Grad besitzt.

Wir betrachten das Ideal $J = (g_1, \ldots, g_m) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$, und sei nach Umnummerierung k (≥ 1) so gewählt, dass

$$J = (g_1, \ldots, g_k)$$

ist, aber keine echte Teilmenge davon dieses Ideal erzeugt. Für $i > k$ schreiben wir

$$g_i = \sum_{j=1}^{k} h_{ij} g_j,$$

wobei $h_{ij} = 0$ ist oder aber homogen vom Grad $\operatorname{grad}(g_i) - \operatorname{grad}(g_j) = \operatorname{grad}(f_j) - \operatorname{grad}(f_i)$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_s}\left(g\left(f_1, \ldots, f_m\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g_i \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \\ &= \sum_{i=1}^{k} g_i \frac{\partial f_i}{\partial x_s} + \sum_{i=k+1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} h_{ij} g_j \right) \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \\ &= \sum_{i=1}^{k} g_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_s} + \sum_{j=k+1}^{m} \left(h_{ji} \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \right) \right). \end{aligned}$$

Wegen $g_1 \notin (g_2, \ldots, g_k)$ gehört für jedes s das homogene Element

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_s} + \sum_{j=k+1}^{m} h_{j1} \frac{\partial f_j}{\partial x_s}$$

nach Lemma 19.12 zu I_G. Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit x_s

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial f_1}{\partial x_s} + \sum_{j=k+1}^{m} h_{j1} \sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial f_j}{\partial x_s} &= (\operatorname{grad}(f_1)) f_1 + \sum_{j=k+1}^{m} h_{j1} (\operatorname{grad}(f_j))\, f_j \\ &\in (x_1, \ldots, x_n) I_G \\ &\subseteq (x_1 f_1, \ldots, x_n f_1) + (f_2, \ldots, f_m)\,. \end{aligned}$$

Die hinteren Summanden in diesem Polynom gehören zu $(f_2, \ldots, f_m)$, daher ist

$$f_1 \in (x_1 f_1, \ldots, x_n f_1) + (f_2, \ldots, f_m)\ .$$

Aus Gradgründen ist $f_1 \in (f_2, \ldots, f_m)$, was ein Widerspruch zur Minimalität des Idealerzeugendensystems von I_G ist. $\square$

Laurent-Entwicklung der Hilbert-Reihe

Wir wenden uns nun der *Rückrichtung* im Satz von Chevalley-Shephard-Todd zu. Zuerst erinnern wir an die *Laurent-Entwicklung*. Eine rationale Funktion besitzt eine Laurent-Entwicklung

$$Q(z) = \frac{F(z)}{G(z)} = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^i,$$

wobei k eine eventuell negative Zahl ist. Ist $a_k \neq 0$ und k minimal und negativ, so heißt $-k$ die Polstellenordnung ($\frac{1}{z^k}$ hat einen Pol der Ordnung k).

Lemma 20.2. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Es sei $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Untergruppe und sei r die Anzahl der Pseudoreflektionen in G. Dann ist die Laurent-Entwicklung der Hilbert-Reihe des Invariantenringes um $z = 1$ gleich*

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{|G|}(1-z)^{-n} + \frac{r}{2\,|G|}(1-z)^{-n+1} + \ldots .$$

Beweis. Nach der Molien-Formel ist

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det\,(\mathrm{Id} - z\sigma)}.$$

Die Summanden haben die Gestalt

$$\frac{1}{|G|} \frac{1}{\det\,(\mathrm{Id} - z\sigma)} = \frac{1}{|G|} \frac{1}{(1 - z\xi_{\sigma,1})} \cdots \frac{1}{(1 - z\xi_{\sigma,n})},$$

wobei die $\xi_{\sigma,j}$ die Eigenwerte (mit Wiederholungen) von σ seien. Für $\sigma = \mathrm{Id}$ hat der entsprechende Summand in $z = 1$ einen Pol der Ordnung n. Für $\sigma \neq \mathrm{Id}$ haben die Summanden an $z = 1$ einen Pol von maximaler Ordnung $n - 1$. Diese Maximalität tritt genau dann ein, wenn der Eigenwert 1 die Vielfachheit $n - 1$ besitzt, wenn also σ eine Pseudoreflektion ist. In diesem Fall ist

$$\frac{1}{\det\,(\mathrm{Id} - z\sigma)} = \frac{1}{(1-z)^{n-1}} \cdot \frac{1}{(1 - z \det\,\sigma)},$$

da bei einer Pseudoreflektion der andere Eigenwert gleich der Determinante ist. Daher ist der Koeffizient zu $(1-z)^{-n+1}$ in der Laurent-Entwicklung gleich

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \text{ Pseudoreflektion}} \frac{1}{1 - \det\,\sigma}$$

(im hinteren Faktor wird $z = 1$ gesetzt). Das Inverse einer Pseudoreflektion ist ebenfalls eine Pseudoreflektion, daher ist

$$\begin{aligned}2 \sum_{\sigma \text{ Pseudoreflektion}} \frac{1}{1-\det \sigma} &= \sum_{\sigma \text{ Pseudoreflektion}} \left(\frac{1}{1-\det \sigma} + \frac{1}{1-(\det \sigma)^{-1}} \right) \\ &= \sum_{\sigma \text{ Pseudoreflektion}} 1 \\ &= r.\end{aligned}$$

□

Beweis der Rückrichtung

Wir beweisen nun die Rückrichtung des Satzes von Chevalley-Sheppard-Todd, dass also ein algebraisch unabhängiges Algebraerzeugendensystem nur bei einer Reflektionsgruppe vorliegen kann. Die Strategie ist, die von den Pseudoreflektionen erzeugte Untergruppe $H \subseteq G$ zu untersuchen und dabei letztlich auf $H = G$ zu schließen.

KOROLLAR 20.3. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* 0. *Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Gruppe derart, dass der zugehörige Invariantenring von n algebraisch unabhängigen homogenen Invarianten $\theta_1, \ldots, \theta_n$ erzeugt werde. Es sei $d_i = \mathrm{grad}\,(\theta_i)$ und r die Anzahl der Pseudoreflektionen in G. Dann ist*

$$|G| = d_1 \cdots d_n \text{ und } r = d_1 + \ldots + d_n - n\,.$$

Beweis. Nach Lemma 19.2 ist

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{(1-z^{d_1})} \cdots \frac{1}{(1-z^{d_n})}.$$

Wegen $1 - z^d = (1-z)\left(1 + z + \ldots + z^{d-1}\right)$ ist dies gleich

$$\frac{1}{(1-z)^n} \cdot \frac{1}{1+z+\ldots+z^{d_1-1}} \cdots \frac{1}{1+z+\ldots+z^{d_n-1}}\,.$$

Der Bruch $\frac{1}{1+z+\ldots+z^{d-1}}$ hat um $z = 1$ die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{d} - \frac{d-1}{2d}(z-1) + \ldots\,,$$

was sich durch Einsetzen und Ableiten ergibt. Die Laurent-Entwicklung um $z = 1$ ergibt sich durch Einsetzen zu

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{d_1 \cdots d_n}(1-z)^{-n} + \frac{d_1 + \ldots + d_n - n}{2 d_1 \cdots d_n}(1-z)^{-n+1} + \ldots.$$

Der Vergleich mit Lemma 20.2 ergibt die Behauptung. □

Wir beweisen nun die Rückrichtung im Satz von Chevalley-Shephard-Todd.

Beweis. Es sei
$$K[X_1, \dots, X_n]^G = K[\theta_1, \dots, \theta_n]$$
mit θ_i algebraisch unabhängig, und es sei $\operatorname{grad}(\theta_i) = d_i$. Es sei $H \subseteq G$ die durch alle Pseudoreflektionen erzeugte Untergruppe. Aufgrund der Hinrichtung des Satzes von Chevalley-Shephard-Todd wissen wir bereits
$$K[X_1, \dots, X_n]^H = K[\psi_1, \dots, \psi_n] \supseteq K[X_1, \dots, X_n]^G$$
mit $\operatorname{grad}(\psi_j) = e_j$ und ψ_j algebraisch unabhängig. Jedes θ_i ist ein Polynom in den ψ_j. Wir können annehmen, dass beide Polynomfamilien nach aufsteigendem Grad geordnet sind, es ist also $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ und $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$. Dabei muss
$$e_i \leq d_i$$
für alle i gelten, da andernfalls nach Aufgabe 20.12
$$K[\theta_1, \dots, \theta_i] \subseteq K[\psi_1, \dots, \psi_{i-1}]$$
gelten würde, was aber wegen der algebraischen Unabhängigkeit der Familien nicht sein kann. Es sei r die Anzahl der Pseudoreflektionen in G und in H. Nach Korollar 20.3 ist
$$r = \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} (e_i - 1).$$
Daher muss $e_i = d_i$ gelten. Damit ist aber
$$|G| = d_1 \cdots d_n = e_1 \cdots e_n = |H|$$
und damit
$$H = G\,.$$
$\square$