Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Fundamentalgruppe und Vektorbündel

Vorlesung 5

Ein étale-trivialisierbares Vektorbündel auf einer projektiven Varietät muss starke Bedingungen erfüllen. Es muss semistabil sein, da ja der Rückzug trivial, also insbesondere semistabil ist, und ein destabilisierendes Unterbündel von E direkt zu einem destabilisierenden Unterbündel des zurückgezogenen Bündels führt. Da sich weiter die (numerischen) Chernklassen bei einem endlichen Morphismus mit dem Grad multiplizieren, müssen diese alle 0 sein. Diese Eigenschaften gelten auch für Bündel, die durch irgendeine endliche Überdeckung trivialisierbar sind.

Frobenius-Periodizität und étale Trivialisierbarkeit

In positiver Charakteristik steht die étale Trivialisierbarkeit in Zusammenhang mit der Frage, wie sich das Bündel zu seinen Frobenius-Rückzügen verhält. Diese Beobachtung geht einerseits auf Katz und andererseits auf Lange-Stuhler zurück.

Satz 5.1. *Es sei K ein endlicher Körper (oder der algebraische Abschluss eines endlichen Körpers) und sei X eine glatte projektive Kurve über K. Es sei E ein Vektorbündel über X. Dann ist E genau dann étale trivialisierbar, wenn es ein n gibt mit $F^{n*}E \cong E$.*

Beweis. Sei zunächst E étale trivialisierbar und sei

$$\rho : \pi_1^{\text{ét}}(X,x) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(K)$$

die nach Satz 4.2 zugehörige lineare Darstellung. Da diese Zuordnung funktoriell ist, und da der absolute Frobenius auf der étalen Fundamentalgruppe die Identität ist, aber die Körperelemente durch ihre p-te Potenz interpretiert werden müssen, entspricht der Frobenius-Rückzug des Bündels der Darstellung $\rho^{(p)}$, bei der sämtliche Matrixeinträge durch ihre p-te Potenzen ersetzt werden. Das Bild der Darstellung ρ ist eine endliche Untergruppe der $\mathrm{GL}_r(K)$, so dass es einen endlichen Körper $\mathbb{F}_{p^e}$ gibt, in dem sämtliche Einträge der beteiligten Matrizen liegen. Daher stimmen diese Matrizen mit ihren komponentenweise genommenen p^e-ten Potenzen überein und daher ist der e-te Frobenius-Rückzug des Bündels isomorph zum Ausgangsbündel.

Sei umgekehrt $F^{e*}E \cong E$. Das Vektorbündel E wird durch einen Kozyklus (ein Verklebedatum) beschrieben, also eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und invertierbare Übergangsmatritzen $T_{ij} \in \mathrm{GL}_r(A_{ij})$ mit $A_{ij} = \Gamma(U_i \cap$

$U_j, \mathcal{O}_X)$, die für drei Indizes verträglich sein müssen. Der e-te Frobenius-Rückzug wird durch die Übergangsmatrizen $T_{ij}^{(q)}$ beschrieben, wobei komponentenweise potenziert wird. Die Isomorphie bedeutet, dass es (auf einer eventuell verfeinerten offenen affinen Überdeckung) invertierbare Matrizen $M_i \in \mathrm{GL}_r(A_i)$ (mit $A_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$) gibt, die die Beziehung (das ist die Korandbedingung)

$$M_i T_{ij} M_j^{-1} = T_{ij}^{(q)}$$

erfüllen. Wir betrachten zu jedem $i \in I$ die zu A_i und M_i in Lemma 4.9 mit Hilfe von Variablentupeln $X^{(i)} = X_{rs}^{(i)}$ konstruierten étalen endlichen A_i-Algebren B_i. Es seien

$$V_i \longrightarrow U_i$$

die zugehörigen Überlagerungen. Diese verkleben mittels der Identifizierungen $X_{rs}^{(i)} = T_{ij} X_{rs}^{(j)}$ (auf $U_i \cap U_j$) zu einer endlichen étalen Überlagerung $\varphi : Y \to X$. Nach Konstruktion hat man die invertierbaren Variablenmatrizen $X^{(i)} \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Y)$ zur Verfügung und für den zurückgezogenen Kozyklus T_{ij} gilt $T_{ij} = X^{(i)} \circ (X^{(j)})^{-1}$. Der Rückzug des Bündels E nach Y wird durch diesen Kozyklus beschrieben und ist daher trivial. □

Lemma 5.2. *Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik p, sei A eine kommutative K-Algebra und sei $M \in \mathrm{GL}_r(A)$ eine invertierbare $r \times r$-Matrix mit Einträgen aus A. Es sei $X = (X_{st})_{1 \leq s,t \leq r}$ eine Variablenmatrix und*

$$B = A[X, (\det X)^{-1}]/(X^{(q)} - MX)\,,$$

wobei $q = p^e$, $e \geq 1$, eine Primzahlpotenz und $X^{(q)} = (X_{st}^q)_{1 \leq s,t \leq r}$ ist. Dann ist B eine endliche étale A-Algebra.

Beweis. Die definierende Matrixgleichung

$$X^{(q)} = MX$$

bedeutet

$$X_{st}^q = \sum_{k=1}^r m_{sk} X_{kt}\,.$$

Ferner ergibt sich aus der Vertauschbarkeit des Frobenius-Homomorphismus mit der Determinante und aus dem Determinantenmultiplikationssatz die Beziehung

$$(\det X)^q = \det M \cdot \det X$$

bzw.

$$((\det X)^{-1})^q = (\det M)^{-1} \cdot (\det X)^{-1}\,.$$

Daher kann man die Potenzen X_{st}^ℓ und $((\det X)^{-1})^n$ für $n \geq q$ durch A-Linearkombinationen von kleineren Potenzen ausdrücken, so dass B ein endliches A-Modul-Erzeugendensystem besitzt. Die Matrixgleichung zeigt ebenfalls, dass die A-Algebra $\tilde{B} = A[X]/(X^{(q)} - MX)$ (also ohne die Determinante) frei über A ist und damit auch flach. Die Flachheit bleibt erhalten, wenn man die Determinante als Nenner aufnimmt. Zum Beweis, dass eine étale Abbildung vorliegt, müssen wir zeigen, dass $dX_{\ell t} = 0$ ist für alle Paare (ℓ, t). Aufgrund der beschreibenden Gleichungen und wegen $q = 0$ in A ist

$$\sum_{k=1}^{r} m_{sk} dX_{kt} = 0$$

für alle (s, t). Es sei $C = (c_{\ell s})$ die inverse Matrix zu M. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=1}^{r} c_{\ell s} (\sum_{k=1}^{r} m_{sk} dX_{kt}) \\ &= \sum_{k,s} c_{\ell s} m_{sk} dX_{kt} \\ &= \sum_{k=1}^{r} (\sum_{s=1}^{r} c_{\ell s} m_{sk}) dX_{kt} \\ &= dX_{\ell t}, \end{aligned}$$

da bei $k \neq \ell$ die innere Summe gleich 0 und bei $k = \ell$ die innere Summe gleich 1 ist. □

Es sei

$$F : X \longrightarrow X$$

der absolute Frobeniusmorphismus. Wenn das Bündel E durch die étale Überlagerung $Y \to X$ trivialisiert, so gilt dies natürlich auch für die Frobenius-Rückzüge $F^{e*}(E)$. Daher sind diese Rückzüge ebenfalls semistabil und erfüllen somit die folgende Definition.

Definition 5.3. Ein Vektorbündel E auf einer glatten projektiven Varietät X (mit einer Polarisierung $\mathcal{O}_X(1)$, die den Grad festlegt) heißt *stark semistabil*, wenn sämtliche Frobenius-Rückzüge $F^{e*}(E)$ semistabil sind.

Satz 5.4. *Es sei K ein endlicher Körper (oder der algebraische Abschluss eines endlichen Körpers) und sei X eine glatte projektive Kurve über K. Es sei E ein Vektorbündel vom Grad 0 über X. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *Das Bündel E ist endlich trivialisierbar, d.h. es gibt einen endlichen surjektiven Morphismus*

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

(Y ebenfalls eine glatte projektive Kurve) mit $\varphi^* E$ trivial.

(2) *E ist stark semistabil.*

(3) *Es gibt $n > m$ mit $F^{n*} E \cong F^{m*} E$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Da $\varphi^* E$ trivial ist, gilt dies auch für $F^{e*}(\varphi^* E) = \varphi^*(F^{e*} E)$. Daraus folgt, dass die $F^{e*} E$ semistabil sind. (2) $\Rightarrow$ (3). Das Bündel E ist über einem endlichen Körper definiert. Es gibt aber überhaupt nur endlich viele Isomorphieklassen von semistabilen Vektorbündel vom Grad 0, die über diesem Körper definiert sind. Daher muss es in der Familie $F^{e*}E$, $e \in \mathbb{N}$, eine Wiederholung geben. (3) $\Rightarrow$ (1). Wir schreiben die Voraussetzung als $F^{(n-m)*}(F^{m*}E) \cong F^{m*}E$. Aufgrund von Satz 4.8 gibt es eine étale Trivialisierung $\varphi : Y \to X$ von E. Somit ist $\varphi \circ F^m$ ein endlicher Morphismus, der E trivialisiert. $\square$

Der Unterschied zwischen der étalen Fundamentalgruppe und Noris Fundamentalgruppe entspricht zu einem großen Teil der Existenz von Frobeniustrivialisierbaren, aber nicht trivialen Vektorbündeln.

Beispiel 5.5. Es sei $d \geq 2$ und sei K ein Körper der Charakteristik p, die die Kongruenzbedingung $p = -1 \bmod 2d$ erfüllt. Dann ist auf der Fermat-Kurve

$$X = \operatorname{Proj} K[U, V, W]/(U^{2d} + V^{2d} - W^{2d})$$

das Syzygienbündel $\operatorname{Syz}(U^2, V^2, W^2)(3)$ zu seinem ersten Frobenius-Rückzug, also zu $F^*(\operatorname{Syz}(U^2, V^2, W^2)(3)) = \operatorname{Syz}(U^{2p}, V^{2p}, W^{2p})(3p)$ isomorph (aber selbst nicht trivial). Daher ist es nach Satz 4.8 auch étale trivialisierbar. Es gibt auch unendlich viele Charakteristiken, für die das entsprechende Bündel nicht stark semistabil und nicht étale trivialisierbar ist. Daher ist das Bündel auch in Charakteristik 0 nicht étale trivialisierbar.