Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 14

Aufwärmaufgaben

In den folgenden Aufgaben werden Ultrafilter und minimale Primideale besprochen. Wir geben die Definition.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in einem kommutativen Ring heißt *minimales Primideal*, wenn es kein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ gibt.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein multiplikatives System $F \subseteq R$ nennt man einen *Ultrafilter*, wenn $0 \notin F$ ist und wenn F maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Aufgabe 14.1. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System mit $0 \notin F$. Zeige, dass F genau dann ein Ultrafilter ist, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin F$, ein $f \in F$ und eine natürliche Zahl n gibt mit $fg^n = 0$.

Aufgabe 14.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei $F \subset R$ ein Ultrafilter. Zeige, dass das Komplement von F ein minimales Primideal in R ist.

Aufgabe 14.3. Sei R ein kommutativer Ring und sei S ein multiplikatives System mit $0 \notin S$. Zeige, dass S in einem Ultrafilter enthalten ist.

(Man benutze das Lemma von Zorn).

Aufgabe 14.4. Sei R ein kommutativer, reduzierter Ring. Zeige, dass jeder Nullteiler in einem minimalen Primideal enthalten ist.

Aufgabe 14.5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die minimalen Primideale von R den irreduziblen Komponenten von $K-\operatorname{Spek}(R)$ entsprechen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.6. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene $\mathbb{A}_K^2$. Es sei $P \in \mathbb{A}_K^2$ ein Punkt und $U = \mathbb{A}_K^2 \setminus \{P\}$ das offene Komplement davon. Zeige

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = K[X, Y]\,.$$

(Dies besagt, dass eine außerhalb eines Punktes definierte algebraische Funktion sich in den Punkt fortsetzen lässt. In der komplexen Analysis nennt man den entsprechenden Satz den *Riemannschen Hebbarkeitssatz*).

Aufgabe 14.7. (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und M_i, $i \in \mathbb{N}$, seien R-Moduln mit fixierten R-Modulhomomorphismen

$$\varphi_i \colon M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_{i+2} \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakt*, wenn für alle i gilt, dass $\operatorname{Kern}(\varphi_i) = \operatorname{Bild}(\varphi_{i-1})$ ist.

(1) Zeige, dass diese Definition im Falle einer kurzen exakten Sequenz mit der Definition in der Vorlesung übereinstimmt.
(2) Sei nun $R = K$ ein Körper, die M_i seien endlich erzeugt, $M_0 = 0$ und alle $M_i = 0$ für $i \geq n$ für ein gewisses n. Zeige, dass

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K M_i = 0\,.$$

Aufgabe 14.8. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und A eine endlichdimensionale, reduzierte K-Algebra. Zeige, dass dann A ein endliches direktes Produkt von endlichen Körpererweiterungen von K ist.

Hinweis: Man darf ohne Beweis benutzen, dass es in A nur endlich viele Primideale gibt.

Aufgabe 14.9. (5 Punkte)

Beschreibe die Menge M aller 2×3-Matritzen mit Rang ≤ 1 über einem Körper K als K-Spektrum einer geeigneten K-Algebra. Zeige, dass es eine Isomorphie zwischen einer (nicht leeren) Zariski-offenen Teilmenge von M und einer offenen Menge des $\mathbb{A}_K^4$ gibt.

Aufgabe 14.10. (5 Punkte)

Betrachte das Ideal

$$\mathfrak{a} = (U^5 - V^3, U^{11} - W^3, V^{11} - W^5) \subseteq K[U, V, W]$$

und das zugehörige Nullstellengebilde $Z = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^3$. Zeige, dass $W - U^2V$ zum Radikal von $\mathfrak{a}$ gehört. Zeige damit, dass Z isomorph zu einer ebenen algebraischen Kurve ist.

Man benutze, dass das Radikal der Durchschnitt der Primideale ist, die es umfassen.