Fachbereich Mathematik/Informatik **21. Mai 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	4	3	4	4	3	6	7	8	5	4	5	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *endliche* Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(2) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(3) Eine *Einheit* u in einem kommutativen Ring R.
(4) Eine *n-te Einheitswurzel* z in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(5) Die *Charakteristik* eines Körpers K.
(6) Ein *innerer Automorphismus* einer Gruppe G.
(7) Eine *algebraische Zahl* $z \in \mathbb{C}$.
(8) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die *Gradformel* für zwei endliche Körpererweiterungen $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$.
(2) Die *trigonometrische Darstellung* der n-ten komplexen Einheitswurzeln ($n \in \mathbb{N}_+$).
(3) Der *Satz von Lagrange* über die Ordnung eines Gruppenelementes $g \in G$ in einer endlichen Gruppe G.
(4) Der *Satz über den Einsetzungshomomorphismus* zu einer R-Algebra A und einem Element $f \in A$.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Bestimme eine ganze Zahl n derart, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 3x + \frac{7}{3} = 0$$

in $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ liegen.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $2 + 5i$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Betrachte den Körper $K = \mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}/(2)[U]/(U^2 + U + 1)$. Führe im Polynomring $K[X]$ die Polynomdivision

$$X^4 + uX^3 + (u+1)X + 1 \text{ durch } uX^2 + X + u + 1$$

aus, wobei u die Restklasse von U in K bezeichnet.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Finde im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad vier.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Berechne in

$$\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3 + 4X^2 + X + 5)$$

das Produkt

$$(2x^2 + 5x + 3) \cdot (3x^2 + x + 6)$$

(x bezeichne die Restklasse von X).

Aufgabe 9. (6 Punkte)

Beweise die „Gradformel" für eine Folge von endlichen Körpererweiterungen $K \subseteq L \subseteq M$.

Aufgabe 10. (7 Punkte)

Es seien k und n ganze Zahlen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) k teilt n.
(2) Es ist $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$.
(3) Es gibt einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

(4) Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

Aufgabe 11. (8 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es sei $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $F \in \mathbb{C}[X^n]$ (d.h., dass F als Polynom in X^n geschrieben werden kann) genau dann gilt, wenn für jedes $z \in \mu_n$ die Gleichheit

$$F(zX) = F(X)$$

gilt.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige unter Verwendung der Division mit Rest, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Bestimme die Galoisgruppe (einschließlich der Gruppenstruktur) der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[i]$.

Aufgabe 14. (5 (3+2) Punkte)

Es seien D_1 und D_2 kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper K.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$$

durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi^\vee : D_2^\vee \longrightarrow D_1^\vee$$

definiert wird.

(2) Es sei D_3 eine weitere kommutative Gruppe und sei

$$\psi : D_2 \longrightarrow D_3$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit

$$(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee .$$