Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 3

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	2	4	4	3	3	3	7	2	5	3	2	5	9	4	64
erhalt. Pkt.:																	

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.
(2) Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.
(3) Der *Kern* einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Der *Logarithmus zu einer Basis* $b \in \mathbb{R}_+$.
(6) Die „Kreiszahl“ π (gefragt ist nach der Definition mittels trigonometrischer Funktionen).
(7) Eine *Treppenfunktion* $t : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(8) Eine *inhomogene lineare* Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Multiplikationssatz für Determinanten.*
(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(3) Die *Funktionalgleichung* der Exponentialfunktion.
(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

AUFGABE 3. (2 Punkte)

a) Berechne

$$(4 - 7i)(5 + 3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3 + 4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die zwei Untervektorräume

$$U = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

und

$$V = \{p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. (3 Punkte)
Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 7. (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 8. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, \, n \in \mathbb{N}_+ .$$

AUFGABE 9. (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 10. (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

AUFGABE 11. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

AUFGABE 12. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 13. (2 Punkte)

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 14. (5 Punkte)

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f : [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 15. (9 (6+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?