Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 5

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 5.1. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 5.2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweise den folgenden Satz (Satz von Olivier): Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert, dann ist $(n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 5.3. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

Aufgabe 5.4. Zeige $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 5.5. Ist das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right)$ konvergent? Berechne das Cauchyprodukt explizit!

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 5.6. (4 Punkte)

Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{5^n} = \frac{45}{14}$.

Aufgabe 5.7. (4 Punkte)

Untersuche die folgenden beiden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$.