Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 45

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 45.1. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x, y) \longmapsto (xy - 2y^3 + 5, x^3 - xy^2 + y),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1, 2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4, -3)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 45.2. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1, -1, \pi)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2, 0, 5)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 45.3. Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det : \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2, 3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 45.4. Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

Aufgabe 45.5. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$, $U \subseteq V$ offen und

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Es sei

$$\gamma : I \longrightarrow U$$

eine differenzierbare Kurve, die ganz in einer Niveaumenge von f verläuft. Zeige, dass

$$\langle \text{grad } f(P), \gamma'(t) \rangle = 0$$

ist für alle $t \in I$.

Aufgabe 45.6. Es seien L und M metrische Räume und es sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 45.7. (4 Punkte)

a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (x, y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3, 2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1, -7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 45.8. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ bei } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 \text{ bei } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 45.9. (3 Punkte)

Zeige, dass keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 45.10. (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (u,v) \longmapsto (uv, u-v, v^2),$$

und

$$\psi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xyz^2, y\exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das Differential von $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das Differential von $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 45.11. (5 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 45.12. (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Nullpunkt und $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{m\to\infty} h_m = 0,\ \lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{||\, h_m \,||} = v \in \mathbb{R}^n,\ f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m,k \in \mathbb{N}\,.$$

Zeige, dass v ein Eigenvektor von $(Df)_0$ zum Eigenwert 0 ist.

Aufgabe 45.13. (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und eine stetige Funktion,

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung

$$f \circ \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht differenzierbar ist.