Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $p \in R$ ein Primelement. Zeige, dass p auch im Polynomring $R[X]$ prim ist.

Aufgabe 18.2. Es seien $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ normierte Polynome mit der Eigenschaft, dass $F = GH$ ist mit $H \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass $H \in \mathbb{Z}[X]$ ist.

Aufgabe 18.3. Berechne die Werte der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ für $n \leq 20$.

Man diskutiere dabei auch die Einheitenversion des Chinesischen Restsatzes, siehe Anhang 4.

Aufgabe 18.4. Schreibe den 5-ten Kreisteilungskörper K_5 als quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

Aufgabe 18.5. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeige, dass der n-te Kreisteilungskörper mit dem $2n$-ten Kreisteilungskörper übereinstimmt.

Aufgabe 18.6. Bestimme die Kreisteilungspolynome Φ_n für $n \leq 15$.

Über einem beliebigen Körper K werden Kreisteilungskörper folgendermaßen definiert.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Der n-te *Kreisteilungskörper über K* ist der Zerfällungskörper des Polynoms

$$X^n - 1$$

über K.

Aufgabe 18.7. Sei p eine Primzahl und $q = p^e$, $e \geq 1$, eine Primzahlpotenz. Zeige, dass der $(q-1)$-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ gleich $\mathbb{F}_q$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.8. (3 Punkte)

Betrachte das Polynom

$$P = x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 3x + 1\,.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 18.9. (4 Punkte)

Zeige, dass die beiden folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel sind.

a) $y^4 + 3x^2y^2 + 4x^7y + 2x$.

b) $y^6 + 3xy^4 + 3x^2y^2 + x^3$.

Aufgabe 18.10. (4 Punkte)

Zeige, dass die Eulersche Funktion φ für natürliche Zahlen n, m die Eigenschaft

$$\varphi(\mathrm{ggT}(m, n))\varphi(\mathrm{kgV}(m, n)) = \varphi(n)\varphi(m)$$

erfüllt.

Aufgabe 18.11. (4 Punkte)

Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge $\frac{\varphi(n)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sowohl in 1 als auch in $\frac{1}{3}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 18.12. (4 Punkte)

Beweise die *Eulersche Formel* für die Eulersche Funktion φ, das ist die Aussage, dass

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} (1 - \frac{1}{p})$$

gilt.

Aufgabe 18.13. (4 Punkte)

Zeige, dass das achte Kreisteilungspolynom $X^4 + 1$ über allen endlichen Primkörpern $\mathbb{F}_p$ reduzibel ist.

Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{F}_{p^2}$ für $p \neq 2$ bereits eine primitive achte Einheitswurzel enthält.

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl, die wir als $n = kp^a$ schreiben mit k und p teilerfremd. Zeige, dass der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ gleich $\mathbb{F}_q$ ist (mit $q = p^e$), wobei q die minimale echte Potenz von p mit der Eigenschaft ist, dass $q-1$ ein Vielfaches von k ist. Zeige insbesondere, dass es ein solches q gibt.

Die nächste Aufgabe ist eine Kollektivaufgabe, die auf Wikiversity bearbeitet werden soll.

Aufgabe 18.15. (8 Punkte)

Erstelle eine Tabelle, die für die ersten zwölf Primzahlen p und für $n = 1, \ldots, 12$ angibt, welcher endliche Körper $\mathbb{F}_{p^e}$ der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ ist.

(Man trage die Exponenten e ein; es empfiehlt sich zur Probe, die Zeilen und Spalten unabhängig voneinander durchzurechnen.)

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	1	2	1	4							
3	1											
5	1											
7	1											
11	1											
17	1											
19	1											
23	1											
29	1											
31	1											
37	1											