Fachbereich Mathematik/Informatik **14. Januar 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Nachklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	3	5	9	3	6	7	5	4	7	3	64
erhalt. Pkt.:														

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *n-te* Einheitswurzel ζ in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(2) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(3) Eine *algebraische Zahl* $z \in \mathbb{C}$.
(4) Zwei *konjugierte* Elemente $x, y \in L$ in einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(5) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(6) Eine (endliche) *Galoiserweiterung* $K \subseteq L$.
(7) Eine *auflösbare* Gruppe G.
(8) Ein *konstruierbares* n-Eck ($n \in \mathbb{N}_+$).

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Lemma von Bezout* für Hauptidealbereiche.
(2) Der *Satz über den Zusammenhang zwischen Charakteren von D und Automorphismen von D-graduierten Körpererweiterungen $K \subseteq L$.*
(3) Der *Hauptsatz über endliche Körper.*
(4) Der *Satz über konjugierte Elemente bei einer normalen Körpererweiterung.*

AUFGABE 3. (4 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}/(3)[U]/(U^2+1)$, wobei die Restklasse von U mit u bezeichnet sei.

$$\begin{pmatrix} 1+2u & 2 \\ 2+u & 2+2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+u \\ 1+2u \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 4. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Q}[X]/(X^3+4X^2-7)$ das Inverse von $\frac{1}{3}x+5$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

AUFGABE 5. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige unter Verwendung der Division mit Rest, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 6. (9 (1+1+2+2+3) Punkte)

Wir betrachten die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = L\,.$$

a) Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$.

b) Beschreibe eine möglichst einfache $\mathbb{Q}$-Basis von L.

c) Zeige, dass eine graduierte Körpererweiterung vorliegt. Was ist die graduierende Gruppe?

d) Bestimme die $\mathbb{Q}$-Automorphismen von L.

e) Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + i$.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_{49} \longrightarrow \mathbb{F}_{49}$$

bezüglich einer geeigneten $\mathbb{F}_7$-Basis von $\mathbb{F}_{49}$.

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper der Charakteristik ungleich 2. Zeige unter Verwendung der Isomorphiesätze, dass genau die Hälfte der Elemente aus $\mathbb{F}_q^\times$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ ist.

Aufgabe 9. (7 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeige, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{a}]$ eine Körpererweiterung ist, die keine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Bestimme das Kreisteilungspolynom Φ_{15}.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Wie viele Unterkörper besitzt der Kreisteilungskörper K_{13}?

Aufgabe 12. (7 Punkte)

Es sei G eine auflösbare Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass auch H auflösbar ist.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Beschreibe die wesentlichen mathematischen Schritte, mit denen man beweisen kann, dass die „Quadratur des Kreises“ nicht möglich ist.