Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 1

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Bestätige folgende Aussagen.

(1) Die dritten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ sind 1, $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ und $\eta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
(2) Es ist $\epsilon^2 = \eta$ und $\eta^2 = \epsilon$.
(3) Es ist $1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$.
(4) Es ist $\epsilon + \epsilon^2 = -1$.

Aufgabe 1.2. Eliminiere in der kubischen Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 5x - 2 = 0$$

den quadratischen Term.

Aufgabe 1.3. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x + 5 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

Aufgabe 1.4. Es sei p eine Primzahl. Zeige, unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 1.5. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 1.6. Es sei $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ eine kubische Gleichung mit $a_i \in \mathbb{Q}$. Eliminiere den linearen Term. Ist dies stets über $\mathbb{Q}$ möglich?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.7. (4 Punkte)

Es sei

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

eine polynomiale Gleichung mit $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Zeige, dass es eine äquivalente polynomiale Gleichung der Form

$$x^n + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

gibt.

Aufgabe 1.8. (6 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

Aufgabe 1.9. (5 Punkte)

Bestimme die Lösungen der polynomialen Gleichung

$$x^6 - 4x^2 + 7 = 0\,.$$

Aufgabe 1.10. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

In der nächsten Aufgabe soll über dem Körper $L = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ aus Beispiel 1.7 gerechnet werden.

Aufgabe 1.11. (4 Punkte)

Führe in $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}])[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^3 - (2+\sqrt{3})X^2 + 5\sqrt{3}X + 1 + 2\sqrt{3}$ und $T = \sqrt{3}X^2 - X + 2 + 7\sqrt{3}$ durch.