Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 13

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und $K \subseteq L$ der Zerfällungskörper von F. Zeige, dass die Abschätzung

$$\operatorname{grad}_K L \leq n!$$

gilt.

Aufgabe 13.2. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$ und sei $K \subseteq M$ eine weitere Körpererweiterung. Es sei E die Menge der K-Algebra-Homomorphismen von L nach M. Zeige, dass die Zuordung

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(E),\ \varphi \longmapsto (\iota \mapsto \iota \circ \varphi),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 13.3. Betrachte die Menge $\mu_4(\mathbb{C})$ der vierten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Welche sind untereinander über $\mathbb{Q}$ konjugiert?

Aufgabe 13.4. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die n Vektoren (im $\mathbb{C}^n$)

$$(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}), \zeta \in \mu_n(\mathbb{C}),$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 13.5. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Berechne die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$((\zeta^{r+s})_{0 \leq r,s \leq n-1})$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 13.6. Es sei K ein Körper mit einer Charakeristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 13.7. Zeige, dass die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_4$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 13.8. Zeige, dass die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{F}_2(X) \subseteq \mathbb{F}_2(X)[T]/(T^2 - X)$ keine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 13.9. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\mu_n(L)$ (zu $n \in \mathbb{N}_+$) die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in L. Zeige, dass es zu jedem n einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(L|K) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\mu_n(L))$$

gibt.

Bei einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$ kann man jeden K-Algebra-Automorphismus von L - also jedes Element der Galoisgruppe - als eine bijektive K-lineare Abbildung

$$L \cong K^n \longrightarrow L \cong K^n$$

auffassen und kann daher die Begriffe der linearen Algebra darauf anwenden. Damit hat man insbesondere den Begriff der Determinante zur Verfügung.

Aufgabe 13.10. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow K^{\times},\ \varphi \longmapsto \det \varphi,$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Aufgabe 13.11. Sei D eine endliche kommutative Gruppe mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^{\vee}$ in einen Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$D^{\vee} \longrightarrow K^{\times},\ \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.12. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\varphi : K \longrightarrow K$$

ein Körper-Automorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$K[X] \longrightarrow K[X], \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) X^i,$$

ein Ring-Automorphismus des Polynomrings $K[X]$ ist.

Aufgabe 13.13. (2 Punkte)

Sei D eine endliche kommutative Gruppe und sei $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Beweise für $\chi \in D^\vee$ die Gleichheit

$$\prod_{d \in D} \chi(d) \, = \, \det \, \varphi_\chi,$$

wobei φ_χ den zugehörigen K-Automorphismus von L bezeichnet (siehe Lemma 9.11).

Aufgabe 13.14. (3 Punkte)

Betrachte die Menge $\mu_8(\mathbb{C})$ der achten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Welche sind untereinander über $\mathbb{Q}$ konjugiert?

Aufgabe 13.15. (5 Punkte)

Sei D eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^\vee$ mit Werten in einem Körper K.

a) Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\psi : D^\vee \longrightarrow K^\times, \, \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

nur die Werte 1 und -1 annehmen kann.

b) Es sei vorausgesetzt, dass K eine n-te primitive Einheitswurzel enthält. Zeige, dass ψ genau dann den Wert -1 annimmt, wenn n gerade ist.