Fachbereich Mathematik/Informatik **30. September 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	4	5	9	8	9	3	6	5	4	64
erhaltene Pkt.:													

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (*kursiv* gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *rationale Funktion* (in einer Variablen über $\mathbb{R}$).
(2) Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.
(3) Eine in einem Punkt *total differenzierbare* Abbildung.
(4) Ein C^1-*Diffeomorphismus*.
(5) Der *Dualraum* eines K-Vektorraumes.
(6) Die *Hesse-Matrix* zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion

$$h : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $P \in G$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(7) Eine *invariante* Fahne zu einer linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

(8) Ein *zeitunabhängiges Vektorfeld*.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Kettenregel* für total differenzierbare Abbildungen.
(2) Der *Satz über die (lokale) Umkehrabbildung*.
(3) Der *Sylvestersche Trägheitssatz* über eine symmetrische Bilinearform.
(4) Der *Banachsche Fixpunktsatz*.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 5. (5 Punkte)
Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Aufgabe 6. (9 Punkte)
Es sei

$$f :]0, 1] \longrightarrow [0, \infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty[\longrightarrow]0, 1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y)\,dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Aufgabe 7. (8 (1+4+3) Punkte)
Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, \sin t\,).$$

a) Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.

b) Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.

c) Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Aufgabe 8. (9 Punkte)

Beweise die Kettenregel für total differenzierbare Abbildungen.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

Aufgabe 10. (6 (3+3) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto \frac{xz}{x^2 + y^2}$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von f und stelle den Gradienten zu f auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von f.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$