Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Bestimme die multiplikative Ordnung aller Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Finde primitive Elemente in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(13)$, $\mathbb{Z}/(17)$ und $\mathbb{Z}/(19)$.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Berechne die Restklasse von 2^{1563} modulo 23.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei p eine ungerade Primzahl. Beweise unter Verwendung des Satzes von Wilson, dass

$$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (p-4)^2 \cdot (p-2)^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \mod p$$

gilt.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Zeige, dass die Eulersche Funktion φ für natürliche Zahlen n, m die Eigenschaft

$$\varphi(ggT(m,n))\varphi(kgV(m,n)) = \varphi(m)\varphi(n)$$

erfüllt.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Beweise die Eulersche Formel für die φ-Funktion, das ist die Aussage, dass

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n,\ p \text{ prim}}(1 - \tfrac{1}{p})$$

gilt.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Bestimme die nilpotenten Elemente, die idempotenten Elemente und die Einheiten von $\mathbb{Z}/(72)$.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Beweise ausschließlich durch Anzahlbetrachtungen die Aussage, dass der kanonische Homomorphismus $(\mathbb{Z}/(p^r))^\times \to (\mathbb{Z}/(p))^\times$ surjektiv ist (p Primzahl).

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Zeige, dass für natürliche Zahlen k und n mit $k \,|\, n$ der kanonische Homomorphismus

$$(\mathbb{Z}/(n))^\times \to (\mathbb{Z}/(k))^\times$$

surjektiv ist.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl. Charakterisiere diejenigen Teiler k von n mit der Eigenschaft, dass für den kanonischen Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k)$$

gilt, dass a in $\mathbb{Z}/(n)$ eine Einheit ist genau dann, wenn $\varphi(a)$ in $\mathbb{Z}/(k)$ eine Einheit ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei p eine fixierte Primzahl. Zu jeder ganzen Zahl $n \neq 0$ bezeichne $\nu_p(n)$ den Exponenten, mit dem die Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von n vorkommt.

a) Zeige: die Abbildung $\nu_p : \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{N}$ ist surjektiv.

b) Zeige: es gilt $\nu_p(nm) = \nu_p(n) + \nu_p(m)$.

c) Finde eine Fortsetzung $\nu_p : \mathbb{Q} - \{0\} \to \mathbb{Z}$ der gegebenen Abbildung, die ein Gruppenhomomorphismus ist (wobei $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} - \{0\}$ mit der Multiplikation und $\mathbb{Z}$ mit der Addition versehen ist).

d) Beschreibe den Kern des unter c) beschriebenen Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Sei $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Betrachte die beiden Unterringe

$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subset \mathbb{Z}[\omega] = S$$

der komplexen Zahlen (S ist also der Ring der Eisensteinzahlen). Finde ein Beispiel von zwei Elementen in R, die in R nicht assoziiert sind, wohl aber in S. Gebe daran anschließend ein Beispiel eines irreduziblen Elementes in R, dass nicht prim ist (in R). Ist es prim in S?

Für eine Lösung des folgenden Problems von Loos und Schleicher haben die Autoren einen Preis von 1000 Pfund ausgesetzt. Lösungen bitte an die Autoren. Für akzeptierte und prämierte Erstlösungen gibt es hier zusätzlich 160 Punkte, und Sie wären damit automatisch zur Klausur zugelassen.

Aufgabe 13. (160 Punkte)

Dieses Problem findet sich in den DMV-Mitteilungen (Jahrgang 16, Heft 1, 2008). Für eine richtige Lösung (also Beweis oder Gegenbeispiel) ist von den Autoren, Andreas Loos (Otto-von-Guericke Universität Magdeburg) und Dierk Schleicher (Jacobs University Bremen) ein Preisgeld von 1000 Pfund (so stehts im Text) ausgesetzt.

Für positive ganze Zahlen n betrachten wir folgenden Algorithmus.

> Wenn n gerade ist, so ersetze n durch die Hälfte.
>
> Wenn n ungerade ist, so multipliziere n mit 3 und addiere dann 1 dazu.

Frage: Ist es wahr, dass man bei jeder Startzahl n früher oder später bei 1 landet?