

**Problème 1****Modulation et démodulation spatiales en optique**

En électronique, la modulation temporelle d'un signal et sa démodulation sont des techniques importantes et connues dans le domaine de la transmission des informations par voie hertzienne.

Ces techniques peuvent être transposées aux variations spatiales d'un signal, en optique.

**1. Interférence de deux ondes monochromatiques, planes**

On réalise, dans l'air, l'interférence de deux ondes monochromatiques, planes, cohérentes, de même amplitude  $A_0$  et de même phase nulle en O (Figure A1) ; la première, de direction Oz, tombe normalement sur un écran d'observation Oxy et la seconde fait l'angle  $\theta_0 = 3^\circ$  avec la direction de la première. La longueur d'onde commune est  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ .

- Ecrire les expressions des amplitudes complexes  $\underline{\psi}_1$  et  $\underline{\psi}_2$  des deux ondes en un point P du plan Oxy.
- En déduire la répartition de l'éclairement dans ce plan, la géométrie des franges d'interférence et la valeur de l'interfrange en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ . Calculer l'interfrange en microns.
- Sous quel angle, en minute d'arc, un observateur voit-il une distance égale à l'interfrange, lorsqu'il est placé à une distance de 25 cm du plan Oxy ? Commenter.

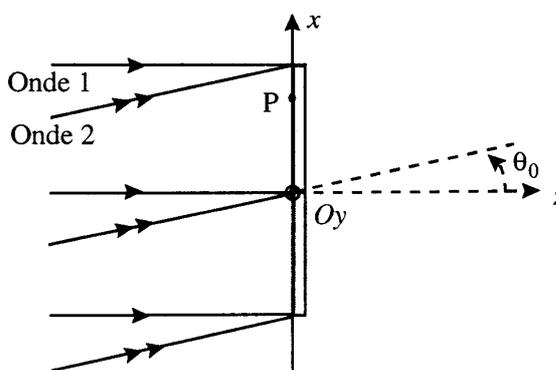


Figure A.1

**2. Réseau sinusoïdal d'amplitude**

- La répartition de l'éclairement  $I(P)$  dans le plan Oxy, calculé à la question A.1.b, peut se mettre sous la forme :

$$I(x) = \frac{I(0)}{2} [1 + \cos(2\pi u_0 x)]$$

Il est possible d'obtenir, à partir de cet éclairement, une plaque photographique de transmittance :

$$t(x) = \frac{1 + \cos(2\pi u_0 x)}{2} \text{ pour } -\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2} \text{ (avec } \ell = 2 \text{ mm) et } t(x) = 0 \text{ autrement.}$$

On réalise ainsi un réseau sinusoïdal par transmission. Trouver  $u_0$  en fonction de  $\lambda$  et  $\theta_0$  ? Comparer les valeurs de  $u_0$  et de  $u_1 = 1/\ell$  en unité SI.

- On appelle spectre spatial de  $t(x)$ , noté  $\hat{t}(u)$  et lu « t chapeau de u », la quantité suivante :

$$\hat{t}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \exp(-i2\pi ux) dx.$$

Montrer que  $\hat{t}(u)$  se met sous la forme suivante :

$$\hat{t}(u) = \alpha_0 \hat{t}_1(u) + \alpha_1 \hat{t}_1(u - u_0) + \alpha_{-1} \hat{t}_1(u + u_0)$$

où  $\hat{t}_1(u) = \frac{\sin(\pi u \ell)}{\pi u \ell}$  et  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{-1}$  trois coefficients à déterminer en fonction de  $\ell$ .

- On éclaire le réseau sous incidence normale, avec une onde monochromatique plane, et on étudie la diffraction à l'infini dans la direction faisant un angle  $\theta$  faible avec l'axe Oz.

Représenter graphiquement la répartition de l'éclairement en fonction de  $u = \theta / \lambda$ .

Comparer la figure de diffraction donnée par ce réseau à celle produite par un réseau de fentes infiniment fines.

### 3. Fonction de transfert d'une lentille en éclairage cohérent

Dans le montage optique de la figure A.2, on forme l'image d'un objet transparent, unidimensionnel (selon Ox), à l'aide d'une lentille mince convergente L, de distance focale image  $f = 20\text{cm}$ . Cette lentille est limitée, suivant une direction parallèle à l'axe des x, par une fente rectangulaire, de largeur D, centrée sur l'axe optique Oz. L'éclairage est cohérent : l'onde qui éclaire l'objet a une longueur d'onde déterminée  $\lambda = 632,8\text{ nm}$  et son vecteur d'onde une valeur et une direction fixées ; dans ce montage, cette direction est normale au plan de l'objet, car l'onde incidente est issue d'une source ponctuelle S, placée au foyer principal objet d'une lentille collimatrice  $L_c$ , mince, convergente, de distance focale image  $f_c = 10\text{ cm}$ .

Dans tout le problème, on suppose satisfaite l'approximation de Gauss de l'optique géométrique.

L'objet est le réseau sinusoïdal précédent, de largeur totale  $\ell$  et de transmittance  $t(x)$ .

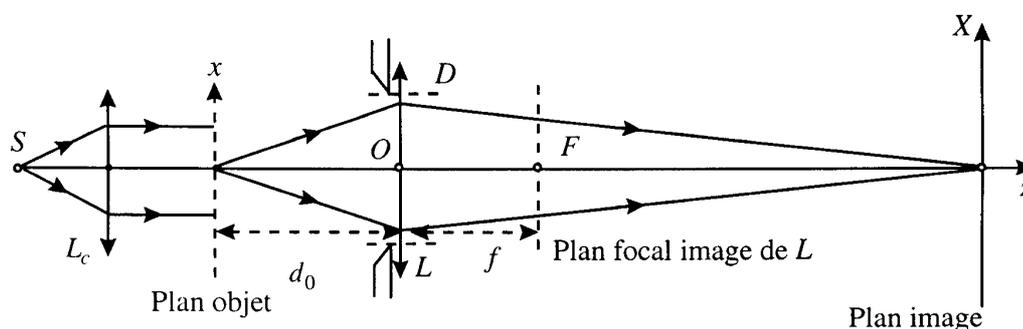


Figure A.2

a) Trouver la position de l'image géométrique donnée par L, lorsque l'objet est situé en avant de L, à une distance  $d_0 = 25\text{ cm}$  et calculer le grandissement transversal. Construire, à l'échelle  $1 / 10$  sur l'axe d'optique, l'image géométrique de l'objet. Où se trouve l'image géométrique de la source S donnée par l'ensemble des deux lentilles  $L_c$  et L ?

b) L'onde incidente est diffractée à l'infini par le réseau dans la direction faisant un angle  $\theta$  faible avec l'axe Oz. Montrer que la répartition de l'amplitude complexe de cette onde diffractée, dans le plan focal image de L, est donnée par  $\hat{t}(u)$  avec  $u = \theta / \lambda$ .

c) Lorsque la largeur D est inférieure à une certaine valeur à déterminer, on n'observe pas dans le plan image la structure périodique du réseau sinusoïdal. Donner une interprétation. En déduire que la lentille diaphragmée se comporte comme un filtre passe-bas dont on donnera la fonction de transfert  $T(u)$ . Calculer en  $\text{m}^{-1}$  la fréquence spatiale de coupure  $u_c$  dans le cas où  $D = 10\text{ cm}$ .

d) Décrire l'aspect du plan focal si  $u_c > 1,5 u_0$  (couleur, position des pics d'intensité).

### 4. Modulation et démodulation spatiales en amplitude

Dans le montage précédent (Figure A.2), on accole au réseau précédent un objet transparent dont la transmittance est  $m(x)$ , x étant la variable spatiale le long de l'axe Ox.

a) Montrer qu'on réalise ainsi simplement un « multiplicateur optique ».

b) On constate, dans le plan focal, que les pics d'intensité s'élargissent. Ainsi, le pic central s'étend jusqu'à une distance égale à  $b = 2\text{mm}$  de l'axe optique. Justifier cet élargissement en s'aidant de l'étude qualitative des réseaux de fentes. Calculer la valeur de la fréquence spatiale  $u_m$  correspondante en  $\text{m}^{-1}$ . Montrer que l'on réalise ainsi un « multiplexage spatial » de l'information contenue dans l'objet, c'est-à-dire une reproduction multiple de cette information, autour de « fréquences spatiales porteuses » déterminées.

Quelles sont les valeurs de ces dernières en  $\text{m}^{-1}$  ?

c) On souhaite démoduler le signal optique afin de restituer l'objet initial. Proposer une méthode optique simple de « démodulation spatiale ».

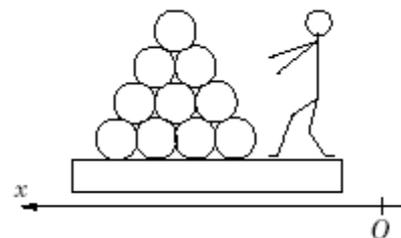
## Problème 2

### Quelques aspects de l'astronautique

Les parties I et II sont uniquement pour les 5/2.

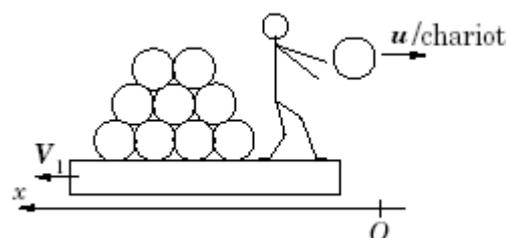
#### Partie I - Principe de la « propulsion par réaction »

Dans cette partie, on étudie le principe de la propulsion. Pour ce faire, on considère une planche à roulettes ou un chariot sur lequel se trouvent un opérateur et  $n$  sacs de sable de masse  $m$  chacun. On néglige l'effet des actions dissipatives. Pour simplifier les expressions demandées on négligera la masse du chariot et de l'opérateur devant la masse d'un sac.



Le référentiel  $R$ , attaché à l'axe  $Ox$  est galiléen.

**I.A** - À l'instant  $t_1 = 0$ , l'opérateur lance le premier sac de masse  $m$  à la vitesse  $\vec{u} = -u\vec{e}_x$  évaluée par rapport au chariot. Montrer que, dans le référentiel  $R$  lié au sol (à l'axe  $Ox$ ), la quantité de mouvement d'un système clairement défini se conserve. En déduire la vitesse  $\vec{v}_1$  (évaluée dans  $R$ ) du chariot et de tout ce qu'il contient après ce premier lancer.



**I.B** - À l'instant  $t_2 = t_1 + T$ , l'opérateur lance un deuxième sac à la vitesse  $\vec{u} = -u\vec{e}_x$  évaluée par rapport au chariot. Évaluer la vitesse  $\vec{v}_2$  par rapport à  $R$  du chariot et tout ce qu'il contient après ce deuxième lancer.

Montrer que cette vitesse peut se mettre sous la forme :  $\vec{v}_2 = -\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right)\vec{u}$ . On précisera le système étudié.

**I.C** - Établir l'expression de la vitesse  $\vec{v}_k$  du chariot, toujours évaluée par rapport au référentiel  $R$ , après le  $k^{\text{ième}}$  jet effectué à l'instant  $t_1 + (k-1)T$ , en fonction de  $n$ ,  $k$  et  $u$ . On précisera le système étudié.

**I.D** - Établir l'expression  $\vec{a}_k$  de l'accélération moyenne du chariot sur une durée  $T$  incluant le  $k^{\text{ième}}$  jet (par exemple entre  $T_1 + (k-3/2)T$  et  $T_1 + (k-1/2)T$ ) en fonction de  $n$ ,  $k$ ,  $T$  et  $\vec{u}$  (par rapport à  $R$ ).

**I.E** - On appelle  $D_m$  le « débit de masse », c'est-à-dire la masse propulsée hors du chariot par unité de temps. Exprimer  $\vec{a}_k$  en fonction de  $n$ ,  $k$ ,  $D_m$ ,  $m$  et  $\vec{u}$ .

**I.F** - Montrer que le système {chariot et son contenu après le  $k^{\text{ième}}$  jet} semble soumis, sur une durée  $T$  incluant le  $k^{\text{ième}}$  jet, à une force de poussée  $\vec{\Pi}$  moyenne que l'on exprimera en fonction de  $D_m$  et  $\vec{u}$ .

#### Partie II - Propulsion par moteur fusée

On étudie une fusée de masse totale (à l'instant  $t$ )  $m(t)$  et de vitesse  $\vec{V}(t)$  dans un référentiel galiléen  $R$ ; soit  $D_m$  le débit massique (constant) de gaz éjectés, et  $\vec{u}$  leur vitesse d'éjection dans le référentiel  $R'$  lié à la fusée. La résultante des forces extérieures exercées sur la fusée est notée  $\vec{R}$ .

**II.A** - En effectuant un bilan de quantité de mouvement entre les instants  $t$  et  $t + dt$  sur un système fermé, montrer que,  $m(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{R} + \vec{T}$  où  $\vec{T}$  est une « force de poussée » dont on donnera l'expression en fonction de  $\vec{u}$  et de  $D_m$ .

**II.B** - On considère une fusée se déplaçant dans le vide, en l'absence de pesanteur; les masses initiale et finale de cette fusée sont  $m_i$  et  $m_f$ ;  $\vec{u}$  et  $\vec{V}(t)$  ont la même direction fixe. Exprimer l'accroissement de vitesse  $\Delta V = V_f - V_i$  en fonction de  $m_i$ ,  $m_f$  et  $u$  où  $u$  est la norme de  $\vec{u}$  supposée constante.

**II.C** - On définit l'efficacité propulsive comme le rapport  $Q$  entre l'énergie cinétique communiquée à la « masse utile »  $m_f$  à partir d'une fusée au repos et l'énergie totale dépensée, définie comme  $m_e u^2 / 2$ , où  $m_e$

est la masse éjectée entre l'instant initial et l'instant final. Exprimer  $Q$  en fonction de  $x = V_f / u$ . Tracer l'allure de  $Q$  en fonction de  $x$ . Comment interpréter qualitativement l'existence d'un maximum ?

**II.D** - La masse totale au décollage d'une fusée Saturn V était de  $2 \cdot 10^6$  kg ; la vitesse d'éjection des gaz était de l'ordre de  $4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'accélération au décollage était d'environ  $1g$  ( $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). Évaluer le débit massique et commenter.

Dans les questions suivantes, le référentiel  $R$  (muni du repère  $Oxyz$ ) est lié au sol.

**II.E** - À  $t=0$ , une fusée initialement immobile située à l'altitude  $z=0$  est mise à feu. Supposons dans un premier temps que la fusée s'élève verticalement, dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$  supposé constant, avec un débit massique  $D_m$  constant. La planète est supposée sans atmosphère. Établir les expressions de la vitesse  $V(t)$  et de l'altitude  $z(t)$  en fonction du temps, de  $m(0)$ ,  $g$ ,  $u$  et  $D_m$ .

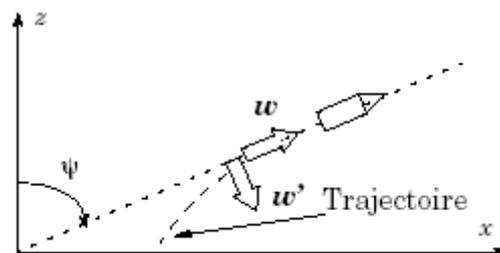
On rappelle que  $\int \ln x dx = x \ln(x) - x$ .

**II.F** - Le rayon de la Terre est  $R_T = 6400 \text{ km}$ . L'intensité de la pesanteur au niveau de la surface de la Terre est  $g_0 \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Évaluer l'énergie potentielle d'une masse de  $1 \text{ kg}$  au repos à la surface de la Terre en prenant son énergie potentielle nulle à l'infini.

**II.G** - L'énergie libérée par la combustion d'un kilogramme de mélange de dioxygène et de dihydrogène ne dépasse pas  $2 \cdot 10^7 \text{ J}$ . Dans ces conditions, est-il possible de s'échapper du champ gravitationnel terrestre ? On demande une étude qualitative.

**II.H** - On considère maintenant un modèle très simplifié de vol non vertical. La fusée est censée s'élever au-dessus d'un plan horizontal (on néglige donc la courbure de la surface...). L'intensité de la pesanteur est supposée constante. On néglige toujours la résistance de l'air. Soit  $\psi(t)$  l'angle entre la verticale et le vecteur vitesse de la fusée.

On note  $\vec{T}$  la « force de poussée » associée à l'éjection de gaz vers l'arrière,  $m(t)$  la masse instantanée.



II.H.1) Exprimer, en fonction de  $\psi$ ,  $V$  et de leurs dérivées premières temporelles l'accélération du vaisseau par rapport au référentiel  $R$  ( $Oxyz$ ) ; on calculera ses composantes  $a_w$  et  $a_{w'}$  sur la base  $\{\vec{w}, \vec{w}'\}$ , où  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  sont les vecteurs tangents et normaux à la trajectoire, et on montrera que  $a_{w'} = V(t) \frac{d\psi}{dt}$ .

II.H.2) En projetant le principe fondamental de la dynamique, sur  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$ , écrire les deux équations différentielles scalaires du mouvement. Les paramètres intervenant seront  $V$ ,  $T$ ,  $m$ ,  $\psi$  et  $g$ .

**II.I** -

II.I.1) On suppose dans la suite que le rapport  $T/m$  est constant dans le temps. Cette approximation vous paraît-elle réaliste, sachant que le premier étage de la fusée Saturn V représente la plus grande partie de la masse initiale ?

II.I.2) On posera  $q = \frac{T}{mg}$ . Établir dans ce cas l'équation différentielle liant  $q$ ,  $V$  et  $\psi$ .

**II.J** - Résoudre l'équation précédente, en imposant que  $V$  soit égal à  $V_0$  quand  $\psi$  est égal à  $\pi/2$ . On donne :  $\int \frac{1}{\sin \psi} d\psi = \ln|\tan(\psi/2)|$ .

**II.K** - Dédurre de cette étude une stratégie pour envoyer un vaisseau spatial sur une orbite circulaire (encore une fois, l'étude proposée est très simplifiée). Quelle autre méthode proposeriez-vous pour obtenir la même orbite ? Quel est, à votre avis, l'intérêt de la méthode proposée ?

### Partie V - Vaisseau spatial dans un champ newtonien

On considère un vaisseau supposé ponctuel de masse  $m$ , mobile par rapport à un astre de masse  $M$ , de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Le champ de gravitation de cet astre est à symétrie sphérique. La constante de gravitation est notée  $G$ . La distance entre le vaisseau et le centre de l'astre est  $r$ ,  $r > R$ . On se placera

dans le référentiel (supposé galiléen) lié à l'astre. Sauf mention contraire, le moteur fusée est éteint, c'est-à-dire que le vaisseau est en vol balistique.

**V.A** - Montrer que le moment cinétique  $\vec{L}_O$  (calculé en  $O$ ) du vaisseau est une constante du mouvement.

**V.B** - Cette constance de  $\vec{L}_O$  a deux conséquences sur la trajectoire du vaisseau : lesquelles ?

**V.C** - Déterminer le champ gravitationnel  $\vec{g}(P)$  créé par l'astre en un point  $P$  extérieur à l'astre à la distance  $r$  de  $O$  en fonction de  $G$ ,  $M$ ,  $r$  et du vecteur  $\vec{OP}$ .

**V.D** - En déduire l'énergie potentielle  $E_p$  du vaisseau en fonction de  $G$ ,  $M$ ,  $m$  et  $r$  en la choisissant nulle à l'infini.

**V.E** - Dans le cas d'une orbite circulaire de rayon  $r_0$ , exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  du vaisseau et sa période de révolution  $T_{rev}$  en fonction de  $G$ ,  $M$ ,  $r_0$  et, si nécessaire,  $m$ . Commenter le signe de  $E_m$ .

**V.F** - Dans le cas où l'astre est notre Terre, on considère une masse de 1kg, initialement au repos à la surface de la Terre (rayon  $R_T = 6400\text{km}$ ), puis placée sur une orbite circulaire de rayon  $r_0 = 7000\text{km}$ . En prenant  $g_0$  l'intensité du champ gravitationnel terrestre, au niveau du sol, égale à  $10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , évaluer numériquement la différence d'énergie mécanique  $\Delta E_m$  entre ces deux états.

**V.G** - 1 « kilowatt-heure » électrique revient environ à 0,15 € ; en déduire numériquement le coût théorique de la satellisation d'un kg de charge utile. Le coût réel est de l'ordre de 1000 € par kg. Commenter ces valeurs.

On peut montrer que la trajectoire d'un vaisseau (moteur coupé) dans le champ gravitationnel de l'astre est une conique, d'équation polaire  $1/r = (1 + e \cos \theta) / p$ , où  $e$  est l'excentricité de la conique et  $p$  le paramètre.

On se limitera ici au cas où la trajectoire est fermée, donc elliptique.

**V.H** - Dessiner l'allure de la trajectoire du satellite en plaçant l'astre attracteur, l'apogée et le périégée. Exprimer le demi-grand axe de l'ellipse  $a$  en fonction de  $e$  et  $p$ .

**V.I** - Donner la relation entre la période orbitale  $T_{orb}$ , le demi-grand axe  $a$ ,  $G$  et  $M$  (troisième loi de Kepler).

**V.J** - Supposons qu'à la distance  $r_0$  du centre de l'astre, la norme  $v$  de la vitesse d'un vaisseau soit la même que pour une orbite circulaire mais que l'angle  $\alpha$  entre le support du vecteur vitesse et la tangente au cercle de centre  $O$  et de rayon  $r_0$  appartienne à  $]0, \pi/2[$ . Déterminer en fonction de  $r_0$  et  $\alpha$  les caractéristiques de la trajectoire de ce vaisseau : sa nature, le demi-grand axe  $a$ , les distances  $r_A$  du centre  $O$  à l'apogée et  $r_p$  du centre  $O$  au périégée, l'excentricité  $e$ , le paramètre  $p$ .

## Partie VI - Vitesse de libération

**VI.A** - Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon  $r_0$  décrite à la vitesse  $V_0$ . On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre. Évaluer la vitesse  $V_1$  qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre en fonction de  $G$ ,  $M$  et  $r_0$ .

**VI.B** - Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget de vitesse »  $\Delta V$  égal à  $4V_0$  ; cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas  $4V_0$ .

**VI.B.1) option 1** : le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à  $5V_0$ . Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de  $V_0$ .

**VI.B.2) option 2** : on utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de  $V_0$  à  $V_0/2$  en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction. Décrire la nouvelle trajectoire : le demi-grand axe  $a$ , les distances  $r_A$  du centre  $O$  à l'apogée et  $r_p$  du centre  $O$  au périégée, les normes des vitesses  $V_A$  et  $V_p$  à l'apogée et au périégée en fonction de  $r_0$ . Quelle condition doit vérifier  $r_p$  ?

**VI.B.3)** On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périégée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de  $V_0$ .

**VI.B.4)** Comparer les deux options, et commenter.

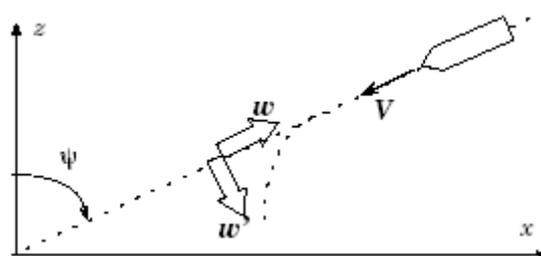
### Partie VII - Rentrée dans l'atmosphère

Il s'agit ici d'étudier le freinage du vaisseau par les hautes couches de l'atmosphère.

**VII.A** - Un modèle très simplifié conduit à l'équation différentielle suivante :  $m \frac{dV}{dt} \approx -\tau S V^2 \rho_0 \exp(-z/H)$  ;  $\tau$  dépend

de la forme du vaisseau,  $S$  est la section (ou maître couple),

$\rho_0$  la masse volumique de l'air au niveau du sol,  $V$  la norme de la vitesse et  $H$  une hauteur caractéristique. Pouvez-vous interpréter *qualitativement* cette équation différentielle ?



**VII.B** - Exprimer  $dz/dt$  en fonction de  $V$  et de  $\psi$ . Dédurre des deux équations précédentes l'expression de  $dV/dz$ .

**VII.C** - Dans la suite, on considère la masse  $m$  du vaisseau et l'angle  $\psi$  constants. Si la vitesse initiale à l'altitude  $z_i$  est  $V_i$ , exprimer  $V/V_i$  en fonction de  $\tau$ ,  $\rho_0$ ,  $\psi$ ,  $S$ ,  $H$ ,  $m$  et des altitudes  $z_i$  et  $z$ .

**VII.D** - Simplifier l'expression précédente si  $\exp(-z/H) \gg \exp(-z_i/H)$ .

**VII.E** - On montre que l'accélération du vaisseau peut s'écrire :  $\frac{dV}{dt} \approx -\alpha \rho_0 V_i^2 \exp\left\{-\frac{z}{H} - \frac{2\alpha \rho_0 H}{\cos \psi} \exp(-z/H)\right\}$ ,

où  $\alpha = \frac{\tau S}{m}$  ne dépend que du vaisseau.

Déterminer la décélération maximale  $\gamma_{\max}$ , en fonction de  $V_i$ ,  $\cos \psi$  et  $H$ .

**VII.F** - Application numérique :

VII.F.1) On s'intéresse à la rentrée dans l'atmosphère du vaisseau Apollo 13.

$H = 8 \text{ km}$ ,  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ SI}$ ,  $V_i = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La décélération ne doit pas excéder  $10g$  où  $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Quelle est la valeur minimale de l'angle  $\psi$  ? Commenter.

VII.F.2) La navette spatiale ne peut pas subir de freinage supérieur à  $3g$  ; en déduire l'angle  $\psi$  minimal. Commenter.

VII.F.3) Que se passe-t-il si  $\psi$  est trop proche de  $\pi/2$  ?

VII.F.4) Si vous étiez responsable de la sélection des astronautes, quelle qualité privilégieriez-vous ?

VII.F.5) Le freinage très violent que subit le vaisseau au cours de sa rentrée dans l'atmosphère nécessite une protection thermique très efficace ; connaissez-vous une ou plusieurs des technologies mises en œuvre ?

**CHIMIE****STRUCTURE CRISTALLINE DU FER ET DE L'ACIER (Extrait E3A MP 2008)**

Le fer peut cristalliser sous deux formes selon la température. À basse température, la maille conventionnelle du fer  $\alpha$  possède la structure cubique centrée (CC) alors qu'à haute température, le fer  $\gamma$  adopte la structure cubique à faces centrées (CFC). La transition s'opère à 910 °C à la pression standard ; puis, au-dessus de 1390 °C, le fer  $\delta$  reprend une structure CC.

Données numériques :            masse molaire du fer             $M(\text{Fe}) = 55,85 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  
     masse molaire du carbone         $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  
     nombre d'Avogadro                 $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

A-1 Fer  $\alpha$ 

**A1\*a.** Donner la définition d'une maille élémentaire. Par quel(s) paramètre(s) est-elle déterminée ?

**A1\*b.** Dessiner la maille conventionnelle du fer  $\alpha$ .

**A1\*c.** Combien cette maille renferme-t-elle d'atomes ?

**A1\*d.** Définir puis calculer la compacité  $\mathcal{L}_{CC}$  d'une structure CC en adoptant le modèle de sphères dures indéformables.

**A1\*e.** Calculer le paramètre  $a_\alpha$  de la maille cubique, sachant qu'à 20 °C la masse volumique du fer  $\alpha$  est  $\rho_\alpha = 7868 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**A1\*f.** Calculer le rayon  $R_\alpha$  de l'atome de fer  $\alpha$  à 20 °C.

A-2 Influence de la température

Le volume massique du fer  $\alpha$  passe de la valeur  $v_{(\alpha)20} = 0,1271 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$  à la température de 20 °C, à la valeur  $v_{(\alpha)910} = 0,1321 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$  à 910 °C, la variation étant linéaire en fonction de la température. L'étude est menée à pression constante.

**A2\*a.** Lequel des trois coefficients thermoélastiques  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\chi_T$  ces données vous permettent-elles de calculer ? En donner la valeur moyenne.

**A2\*b.** Entre quelles limites le paramètre de maille varie-t-il entre ces deux températures ?

**A2\*c.** Quel est le rayon de l'atome de fer  $\alpha$  à 910 °C ?

*Dans la suite, le rayon atomique du fer  $\alpha$  sera  $R_\alpha = 125 \text{ pm}$ .*

A-3 Fer  $\gamma$ 

**A3\*a.** Dessiner la maille conventionnelle du fer  $\gamma$ .

**A3\*b.** Combien cette maille renferme-t-elle d'atomes ?

**A3\*c.** Calculer la compacité  $\mathcal{L}_{CFC}$  d'une structure CFC (modèle de sphères dures indéformables).

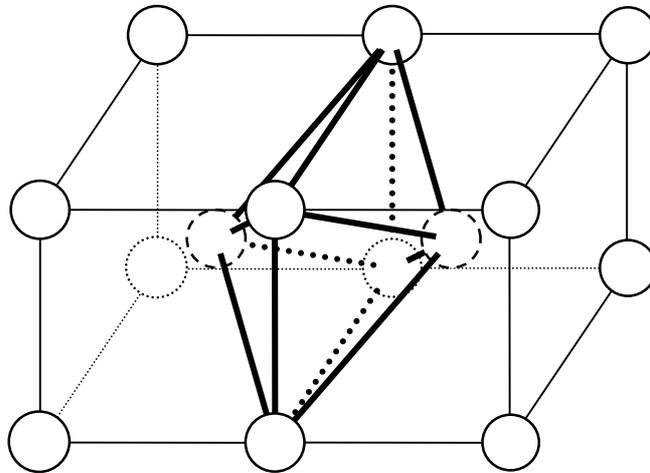
**A3\*d.** Le rayon atomique du fer  $\gamma$  est  $R_\gamma = 129 \text{ pm}$ . Calculer le paramètre  $a_\gamma$  de la maille cubique.

**A3\*e.** Evaluer le volume massique  $v_{(\gamma)910}$  du fer  $\gamma$ .

*Si le carbone est très soluble dans le fer liquide (au-dessus de 1536 °C), il n'en va pas de même lorsqu'il se forme une solution solide fer-carbone (fonte ou acier). En effet, le carbone, dont le rayon atomique vaut  $R_C = 77 \text{ pm}$ , doit s'insérer dans les sites octaédriques des mailles cristallines de fer  $\alpha$  ou de fer  $\gamma$ .*

#### A-4 Sites octaédriques

**A4\*a.** Dans la représentation de la maille de fer  $\alpha$  ci-dessous (figure 1), un site interstitiel a été singularisé. De quel de type de site s'agit-il ? Est-il régulier ? (réponse à justifier)



**Figure 1**

**A4\*b.** Quel serait le rayon maximal  $R_{M\alpha}$  d'un atome qui s'insérerait dans ce site sans entraîner de déformation de la structure cristalline ? Calculer  $R_{M\alpha}$ .

**A4\*c.** Où sont situés les sites octaédriques dans le fer  $\gamma$  ? S'agit-il d'octaèdres réguliers ?

**A4\*d.** Quel serait le rayon maximal  $R_{M\gamma}$  d'un atome qui s'insérerait dans ce site sans déformer la structure cristalline ? Calculer  $R_{M\gamma}$ .

**A4\*e.** Que pouvez-vous en conclure sur la solubilité par insertion du carbone dans le fer solide ?

#### A-5 Insertion du carbone

*Par hypothèse, lorsqu'un atome de carbone s'insère dans le cristal de fer, toutes les mailles subissent la même expansion. L'insertion de carbone dans le fer  $\alpha$  permet de former un alliage appelé ferrite ; lorsque l'insertion s'opère dans le fer  $\gamma$ , l'alliage obtenu est dénommé austénite.*

**A5\*a.** Quelle valeur prend le paramètre de maille du fer  $\alpha$  lorsqu'un atome de carbone s'insère dans un site octaédrique ? À quelle variation relative de volume cela conduit-il ?

**A5\*b.** De même, que devient le paramètre de maille du fer  $\gamma$  lorsqu'un atome de carbone s'insère dans un site octaédrique ? Quelle est la variation relative de volume induite ?

**A5\*c.** Quelles conclusions pouvez-vous en tirer quant à la formation de la ferrite et de l'austénite ?

*Un acier austénitique contient 1,33% de carbone en masse.*

**A5\*d.** Quel est le nombre moyen d'atomes de carbone qui ont été insérés par maille ?

**A5\*e.** Calculer la masse volumique de cet acier. Que pensez-vous de ce résultat ?