

MP 08/09 – Corrigé du D.M. de PHYSIQUE n°9**1^{er} problème****A- Potentiel au voisinage du bord d'un conducteur mince**

$$1. \vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{donc : } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -f'(r)g(\theta), \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}f(r)g'(\theta), \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Dans l'espace autour du conducteur qui est vide de charge, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ soit (en utilisant l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques fournie par

$$\text{l'énoncé) : } f''(r)g(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = 0, \quad \text{soit : } \boxed{\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = K}.$$

K est une constante puisqu'elle ne dépend ni de θ (d'après sa première expression), ni de r d'après sa deuxième expression.

2. Le potentiel est continu, et il vaut V_0 sur la plaque, donc $g(0) = g(2\pi) = 0$.

- Si $K < 0$, $g(\theta)$ est de la forme $g(\theta) = A \exp(-\sqrt{-K}\theta) + B \exp(\sqrt{-K}\theta)$, où A et B sont des constantes. La condition $g(0) = g(2\pi) = 0$ s'écrit :
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A \exp(-\sqrt{-K}2\pi) + B \exp(\sqrt{-K}2\pi) = 0 \end{cases}$$

système de Cramer dont la seule solution est $A = B = 0$. IL vient nécessairement $g(\theta) = 0$, solution sans intérêt physique.

- Si $K = 0$, $g(\theta) = A\theta + B$ et la condition $g(0) = g(2\pi) = 0$ entraîne de même que $g(\theta) = 0$.
- Donc nécessairement $K > 0$. Alors, $g(\theta) = A \cos(\sqrt{K}\theta) + B \sin(\sqrt{K}\theta)$. La condition $g(0) = g(2\pi) = 0$ s'écrit : $A = 0$ et $B \sin(2\sqrt{K}\pi) = 0$. Ceci entraîne (pour avoir une solution non nulle) que : $\sqrt{K} = \frac{n}{2}$, où n est un entier relatif. Alors : $g(\theta) = B \sin(\frac{n}{2}\theta)$. Pour que V ne prenne la valeur V_0 que sur le demi-plan conducteur, il faut que $g(\theta)$ ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$, ce qui est le cas seulement pour $n = 1$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{K = \frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{g(\theta) = \text{constante} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3. On a donc : $r^2 f''(r) + r f'(r) - \frac{1}{4} f(r) = 0$. Injectons dans cette équation différentielle une solution de la forme : $f(r) = r^t$, il vient :

$$t(t-1) + t - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{soit} \quad t = \pm \frac{1}{2}.$$

On a trouvé deux solutions de l'équation différentielle du second ordre vérifiées par $f(r)$ qui forment une base de l'espace des solutions. Donc :

$$\boxed{f(r) = A\sqrt{r} + \frac{B}{\sqrt{r}}}, \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes.}$$

Par continuité du potentiel en O, on a $f(0) = 0$ donc $B = 0$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{V = V_0 + A\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

4. L'équipotentielle $V = V_1$ a pour équations en coordonnées polaires :

$$\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{V_1 - V_0}{A} \quad \text{soit} \quad r = \frac{(V_1 - V_0)^2 / A^2}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{\text{constante}}{1 - \cos\theta}.$$

Les traces des équipotentiels dans le plan $z = 0$ sont des paraboles (de foyer O). Elles sont par symétries invariantes par translation suivant l'axe Oz.

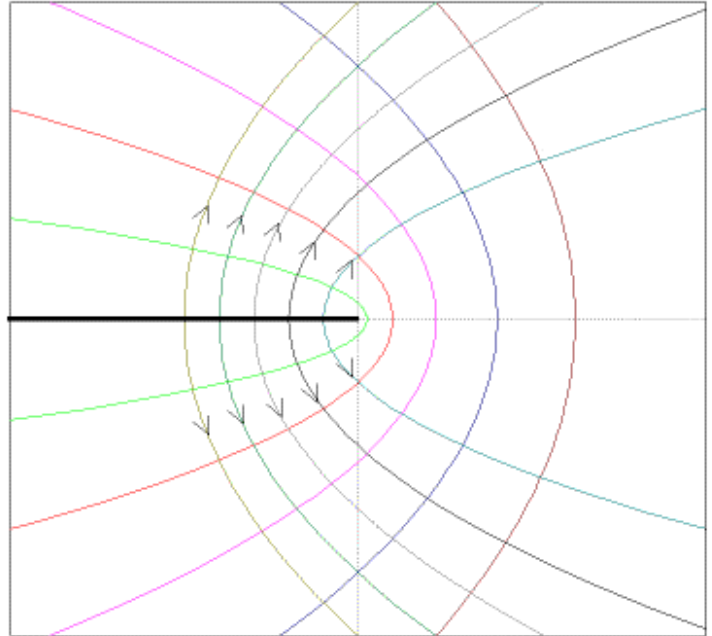
5. Par définition, le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ le long d'une ligne de champ est colinéaire au champ électrique. Ceci s'écrit : $\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$.

Or : $E_r = -\frac{A}{2\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $E_\theta = -\frac{A}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Il vient donc, en séparant les variables :

$$\frac{dr}{r} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \Rightarrow r = \ln \ln r = -2 \ln \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| + \text{constante} \Leftrightarrow r = \frac{\text{constante}}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{\text{constante}'}{1 + \cos(\theta)}$$

Les lignes de champ sont aussi des paraboles de foyer O ; elles sont (comme toujours) orthogonales aux équipotentielles.

Les lignes de champ et équipotentielles sont représentées ci-contre, dans le cas où le potentiel de la plaque est $V_0 > 0$.



6. D'après le théorème de Coulomb, la densité surfacique de charge à la surface de la plaque conductrice est $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$, avec \vec{n} vecteur normal sortant du conducteur. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_1(r) &= \epsilon_0 \vec{E}(r, \theta = 0^+) \cdot \vec{u}_\theta(\theta = 0) \\ &= \epsilon_0 E_\theta(r, \theta = 0^+) = -\epsilon_0 \frac{A}{2\sqrt{r}} \\ \sigma_2(r) &= \epsilon_0 \vec{E}(r, \theta = 2\pi^-) \cdot (-\vec{u}_\theta(\theta = 2\pi)) \\ &= -\epsilon_0 E_\theta(r, \theta = 2\pi^-) = -\epsilon_0 \frac{A}{2\sqrt{r}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sigma_1(r) = \sigma_2(r) = -\epsilon_0 \frac{A}{2\sqrt{r}}}$.

On constate que $\sigma_{1 \text{ ou } 2}(r) \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow 0$. **La densité surfacique de charge devient très grande au bord de la plaque.** C'est une manifestation de l'effet de pointe.

B- Disque conducteur

1. A priori on devrait pouvoir déterminer la répartition des charges sur le conducteur, connaissant la charge totale qu'il porte. La répartition proposée sera confirmée à la fin de la partie suivante.

2. La charge portée par la couronne comprise entre les rayons r et $r + dr$, de surface $dS = 2\pi r dr$ est

$$dQ = \sigma(r) dS = \frac{2\pi\gamma r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \text{ La charge totale portée par le disque est donc : } \boxed{Q = 2\pi\gamma \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi\gamma a}.$$

La charge dQ de la couronne précédente est à distance r du centre du disque. D'après la loi de Coulomb elle crée donc en ce point un potentiel $dV_0 = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dr}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 - r^2}}$. Le potentiel au centre du disque est

donc :

$$\boxed{V_0 = \frac{\gamma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{\pi\gamma}{4\epsilon_0}}.$$

A.N. : Le rapport $C = Q/V_0$ est appelé capacité du disque. Il vaut : $\boxed{C = 8\epsilon_0 a = 7,1 \cdot 10^{-11} \text{ F}}$. La capacité d'un conducteur isolé, même de grande taille, est très inférieure à la capacité d'un condensateur.

3. Au bord du disque, $r = a - x$ avec $x \ll a$. On a alors :

$$\sigma(r) = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - (a-x)^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{2ax - x^2}} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{2ax}}.$$

On retrouve bien le comportement en $1/\sqrt{x}$ trouvé à la partie A.

C- Disque chargé

1. Calculons la charge dQ portée par la bande comprise entre x et $x+dx$ représentée ci-contre.

La charge portée par le petit rectangle hachuré de surface $dS = dx dy$ est $d^2Q = \sigma(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ et y varie de $-\sqrt{a^2 - x^2}$ à $\sqrt{a^2 - x^2}$. Il vient :

$$dQ = \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sigma(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \right) dx = \lambda(x) dx.$$

$\lambda(x)$ qui a la dimension d'une charge linéique est la charge du disque par unité de longueur le long d'un diamètre.

La charge totale du disque est la somme des charges

des bandes précédentes soit : $Q = \int_{-a}^a \lambda(x) dx$.

2. Soit la surface élémentaire autour du point P

représentée ci-dessous. Remarquons que $OH = r \sin \theta$ et $MP = |y - y_M| = |y - r \cos \theta|$. La surface choisie vaut $d^2S = |y - y_M| d\theta dy$ et porte la charge $d^2Q = \sigma(OP) dS$ qui crée en M le potentiel électrostatique :

$$d^2V = \frac{d^2Q}{4\pi\epsilon_0 |y - y_M|} = \frac{\sigma(OP)}{4\pi\epsilon_0} d\theta dy.$$

La coordonnée y varie de $-\sqrt{a^2 - (r \sin \theta)^2}$ à $\sqrt{a^2 - (r \sin \theta)^2}$ et $OP = \sqrt{OH^2 + y^2} = \sqrt{(r \sin \theta)^2 + y^2}$. Le potentiel créé par la surface hachurée sur la figure de l'énoncé s'écrit donc :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{-\sqrt{a^2 - (r \sin \theta)^2}}^{\sqrt{a^2 - (r \sin \theta)^2}} \sigma(\sqrt{y^2 + (r \sin \theta)^2}) dy \right) d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda(r \sin \theta) d\theta.$$

Pour reconstituer tout le disque il faut faire varier θ de 0 à π , donc :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \lambda(r \sin \theta) d\theta.$$

3. Si le disque est conducteur, quel que soit r , $V(r) = V_0$ soit :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \lambda(r \sin \theta) d\theta = V_0.$$

On **admet** que cette relation détermine de manière **unique** la fonction λ . Or, en prenant $\lambda(x) = 4\epsilon_0 V_0$ la relation est vérifiée.

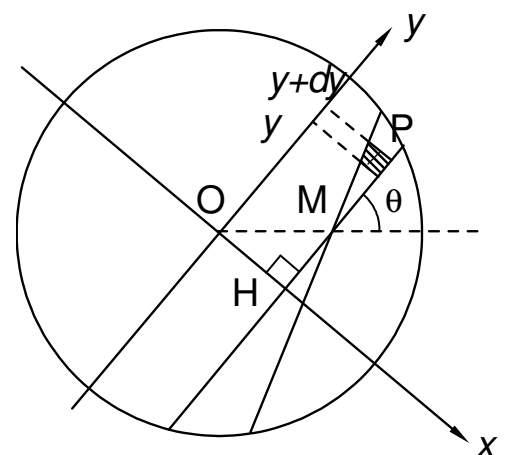
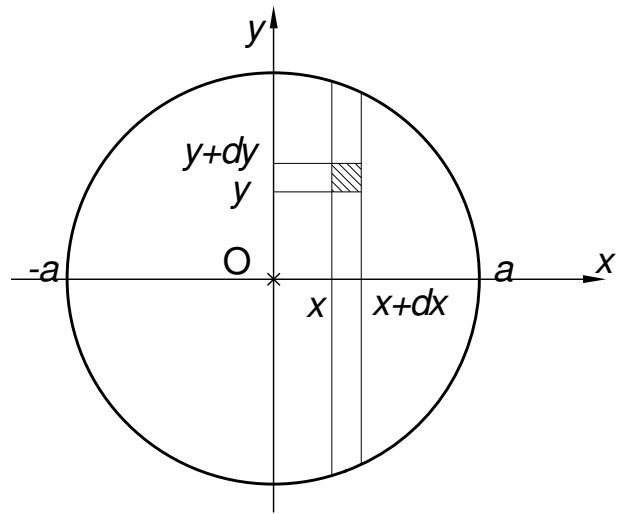
Donc : $\lambda(x) = 4\epsilon_0 V_0$.

La charge totale du disque est donc :

$$Q = \int_{-a}^a \lambda(x) dx = 8\epsilon_0 a V_0.$$

4. Avec $\sigma(r) = \gamma / \sqrt{a^2 - r^2}$, $\lambda(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy = \pi \gamma$.

Cette expression est une constante conformément à la question précédente. La distribution de charge de la partie B est ainsi validée.



2^{ème} problème

I.A.1) Force électrique exercée par une charge ponctuelle q_1 située en M_1 sur une charge ponctuelle q_2 située en M_2 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (M_1 M_2)^2} \vec{u}_{M_1 M_2} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$.

Champ électrique créé en M par une charge ponctuelle q située en P ; $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (PM)^2} \vec{u}_{PM}$.

I.A.2) Le flux du champ électrique à travers une surface fermée \mathcal{S} est égal à la charge électrique située à l'intérieur de la surface divisée par ϵ_0 : $\Phi_E(\mathcal{S}) = \frac{Q_{\text{int}}(\mathcal{S})}{\epsilon_0}$.

I.A.3) Force gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m_1 située en M_1 sur une masse ponctuelle m_2 située en M_2 : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^g = \frac{-Gm_1 m_2}{(M_1 M_2)^2} \vec{u}_{M_1 M_2} = m_2 \vec{g}_1(M_2)$.

Champ gravitationnel créé en M par une masse ponctuelle m située en P ; $\vec{g}(M) = \frac{-Gm}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$.

I.A.4)

Electrostatique	Gravitation
Charge q	Masse m
Champ électrique $\vec{E}(M)$	Champ gravitationnel $\vec{g}(M)$
Densité volumique de charge $\rho(M)$	Masse volumique $\mu(M)$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Th. de Gauss : $\Phi_E(\mathcal{S}) = \frac{Q_{\text{int}}(\mathcal{S})}{\epsilon_0}$	Th. de Gauss : $\Phi_g(\mathcal{S}) = -4\pi G M_{\text{int}}(\mathcal{S})$
$\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{g}(M) = -4\pi G \mu(M)$

I.A.5)a) On utilise des coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O .

Symétries : Tout plan contenant O est plan de symétrie pour la distribution de masse donc le champ gravitationnel en un point M est de la forme : $\vec{G}_T(M) = G_T(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$.

Invariances : Toute rotation autour de O laisse la distribution de masse invariante donc G_T ne dépend pas de θ ni de φ . Finalement : $\vec{G}_T(M) = G_T(r) \vec{u}_r$.

On applique le théorème de Gauss de la gravitation à une sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon r quelconque. Flux du champ gravitationnel :

$$\Phi_{G_T}(\mathcal{S}) = \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{G}_T(P) \cdot d\vec{S}_P = \oiint_{P \in \mathcal{S}} (G_T(r_p) \vec{u}_r) \cdot (dS_p \vec{u}_r) = \oiint_{P \in \mathcal{S}} G_T(r_p) dS_p = G_T(r) \oiint_{P \in \mathcal{S}} dS_p = G_T(r) 4\pi r^2$$

Masse située à l'intérieur de la surface :

- si $r > R_T$, toute la masse de la Terre est à l'intérieur de \mathcal{S} : $M_{\text{int}}(\mathcal{S}) = M_T$;

- si $r < R_T$, la masse étant répartie uniformément dans la Terre : $M_{\text{int}}(\mathcal{S}) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} M_T = \frac{r^3}{R_T^3} M_T$.

Le théorème de Gauss s'écrit $\Phi_{G_T}(\mathcal{S}) = -4\pi G M_{\text{int}}(\mathcal{S})$; on en tire : $G_T(r) = \begin{cases} -\frac{GM_T}{r^2} & \text{si } r > R_T \\ -\frac{GM_T r}{R_T^3} & \text{si } r < R_T \end{cases}$.

$$b) G_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

c) D'après le théorème de Gauss ci-dessus, pour $r \geq R_T$,

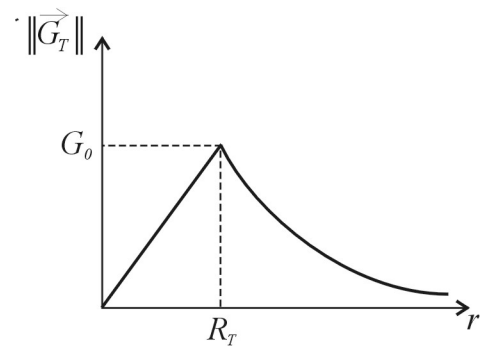
$$G_T(r) = -\frac{GM_T}{r^2} \text{ indépendamment de la répartition de la masse } M_T$$

à l'intérieur de la Terre tant que celle-ci reste à symétrie sphérique.

d) D'après le théorème de Gauss appliqué à la sphère de rayon R_1 :

$$M_{\text{int}}(R_1) = \frac{-1}{4\pi G} \Phi_{G_T}(R_1) = \frac{-1}{4\pi G} (-4\pi R_1^2 G_0) = M_T \frac{R_1^2}{R_T^2}$$

Ainsi, la masse volumique moyenne du noyau est : $\mu_{\text{noyau}} = \frac{M(R_1)}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{3M_T}{4\pi R_T^2 R_1} = 10,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



e) 1^{ère} réponse (qualitative) :

Pour $R_1 < r < R_T$, $\|\vec{G}_T\|$ augmente moins vite que dans le cas où la masse volumique est constante.

D'après le théorème de Gauss, cela signifie que la masse $M_{\text{int}}(r)$ contenue dans la sphère de rayon r augmente moins vite, donc que la masse volumique décroît avec r .

2^{ème} réponse (quantitative) :

D'après le théorème de Gauss, pour r tel que $R_1 < r < R_T$:

$$M_{\text{int}}(r) = \frac{-1}{4\pi G} \Phi_{G_T}(r) = \frac{-1}{4\pi G} (-4\pi r^2 G_0) = \frac{G_0}{G} r^2$$

Ainsi la masse comprise dans le volume compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ est :

$$dM = M_{\text{int}}(r + dr) - M_{\text{int}}(r) = \frac{G_0}{G} ((r + dr)^2 - r^2) \approx 2 \frac{G_0}{G} r dr.$$

Or : $dM = \mu(r) \times 4\pi r^2 dr$. On trouve donc $\mu(r) = \frac{G_0}{2\pi G r}$; elle décroît avec r .

Remarque : Les résultats des question c) et d) peuvent se trouver aussi en utilisant l'équation locale traduisant le théorème de Gauss pour la gravitation, à condition de disposer de la formule de la

divergence en coordonnées sphériques : $\text{div}(\vec{G}_T(r) \vec{u}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 G_T(r))}{dr}$.

Ceci nous donne :

$$- \text{ pour } 0 < r < R_1 : \mu(r) = \frac{-1}{4\pi G} \text{div } \vec{G}_T = \frac{-1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(-G_0 \frac{r}{R_1} \right) \right) = \frac{3G_0}{4\pi G R_1} = \frac{3M_T}{4\pi R_T^2 R_1}$$

(ce qui démontre qu'elle est bien constante)

$$- \text{ pour } R_1 < r < R_T : \mu(r) = \frac{-1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-r^2 G_0) = \frac{G_0}{2\pi G r}$$

IV.A.1)a) La densité volumique d'énergie électrostatique en un point M est $w_{el}(M) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(M)^2$, il faut

donc calculer le champ électrique.

Nous allons d'abord trouver le potentiel. L'épaisseur e étant faible devant les dimensions caractéristiques de plans, on peut négliger les effets de bord ; le potentiel électrostatique est alors fonction seulement de la coordonnée x (figure 8 de l'énoncé). Dans l'espace vide entre les deux plaques il vérifie :

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0 ; \text{ on en tire } V(x) = Ax + B, \text{ et avec les conditions aux limites, } V(e) - V(0) = U,$$

$$V(x) = \frac{U}{e} x + B.$$

Il vient ensuite : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x = -\frac{U}{e}\vec{u}_x$ et $w_{el}(M) = \frac{\epsilon_0 U^2}{2e^2}$.

b) L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur est :

$$W_{el} = \iiint_{\substack{M \in \text{espace} \\ \text{entre les armatures}}} w_{el}(M) d\tau_M = \frac{\epsilon_0 U^2}{2e^2} \times Se = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} U^2.$$

Comme $W_{el} = \frac{1}{2} CU^2$ on trouve $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

c) $C = 2,36 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 236 \text{ pF}$

IV.A.2) La norme de la force s'exerçant sur chaque armature est :

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S = \frac{(CU/S)^2}{2\epsilon_0} S = \frac{(\epsilon_0 U/e)^2}{2\epsilon_0} S = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2e^2}.$$

Les armatures portant des charges de signes opposés, s'attirent mutuellement. En faisant référence à la figure 8 de l'énoncé on a :

$$\vec{F}(\rightarrow x=0) = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2e^2} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}(\rightarrow x=e) = -\frac{\epsilon_0 U^2 S}{2e^2} \vec{u}_x$$

IV.A.3)a) D'après le résultat de la question précédente, appliqué aux deux surfaces de la masse d'épreuve, la force électrostatique totale sur la masse d'épreuve est :

$$\vec{F}_{esx} = \frac{\epsilon_0 (V_p - V_1)^2 S}{2e^2} \vec{u}_x - \frac{\epsilon_0 (V_p - V_2)^2 S}{2e^2} \vec{u}_x$$

b) Dans le cas où $V_2 = -V_1 = V$:

$$\vec{F}_{esx} = \frac{\epsilon_0 S}{2e^2} \left((V_p + V)^2 - (V_p - V)^2 \right) \vec{u}_x = \frac{2\epsilon_0 S}{e^2} V_p V \vec{u}_x.$$

IV.B.1) La force de traînée aérodynamique est la force de frottement sur les hautes couches de l'atmosphère terrestre.

La force de pression de radiation est due à la réflexion du rayonnement solaire direct (pression de radiation solaire) ou réfléchi par la Terre (pression de radiation terrestre) sur le satellite.

IV.B.2) Force 1 : toujours dirigée vers la Terre, c'est la force de gravitation terrestre.

Force 2 : toujours dirigée dans la direction opposée au Soleil, c'est la force de pression de radiation du rayonnement solaire direct.

Force 3 : toujours dirigée dans la direction opposée à la Terre, c'est la force de pression de radiation du rayonnement solaire réfléchi par la Terre.

Force 4 : toujours dirigée dans le sens opposé à la vitesse, c'est la force de traînée aérodynamique.

IV.B.3) Dans le référentiel du satellite, la masse d'épreuve est soumise à :

- la force d'attraction terrestre (son « poids ») : $m\vec{G}_T$
- la force d'inertie d'entraînement due au mouvement du satellite (dont le référentiel n'est pas galiléen) : $-m\vec{a}_s$
- la force électrique \vec{F}_{es} exercée par le dispositif de sustentation.

La condition d'équilibre de la masse d'épreuve par rapport au satellite est :

$$m(\vec{G}_T - \vec{a}_s) + \vec{F}_{es} = \vec{0}.$$

IV.B.4) En projection sur Ox cela s'écrit : $m(G_{Tx} - a_{sx}) + 2\frac{\epsilon_0 S}{e^2} V_p V = 0$. La tension nécessaire pour

maintenir l'équilibre est : $V = \frac{e^2 m}{2\epsilon_0 S V_p} (a_x - G_{Tx})$.

$$\text{IV.C.1)} \Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{e-x} - \frac{\epsilon_0 S}{e+x}.$$

$$\text{Si } x \ll e, \Delta C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{e}} - \frac{1}{1+\frac{x}{e}} \right) \approx \frac{\epsilon_0 S}{e} \left(1 + \frac{x}{e} - 1 + \frac{x}{e} \right) = \frac{2\epsilon_0 S}{e^2} x, \text{ qui est proportionnel à } x.$$

IV.C.2) On a :

$$V_A - V_- = -\frac{1}{C_f} \int i' dt \text{ et } V_- = V_+ = 0 \text{ (amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire).}$$

De plus, en remarquant que les deux armatures qui sont en regard des surfaces de la masse d'épreuve sont au potentiel nul (car on néglige l'impédance des bobinages) :

$$i' = i_2 - i_1 = C_2 \frac{dV_d}{dt} - C_1 \frac{dV_d}{dt} = \Delta C \frac{dV_d}{dt}$$

$$\text{Il vient donc : } V_A = -\frac{\Delta C}{C_f} V_d.$$

$$\text{IV.C.3)} s(t) = kV_d V_A = -k \frac{\Delta C}{C_f} (V_d)^2 = -k \frac{\Delta C}{C_f} V_{d0}^2 \cos^2(\omega t) = -k \frac{\Delta C}{C_f} V_{d0}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right).$$

$s(t)$ contient un composante continue et une composante alternative de pulsation 2ω ; cette composante alternative est éliminée par le filtre passe-bas si $2\omega \gg \omega_{PB}$ où ω_{PB} est la pulsation de coupure du filtre passe-bas, le signal de sortie du démodulateur est dans ce cas un signal continu.

$$\text{IV.C.4)} \text{ Ce signal vaut alors : } V_s = -\frac{1}{2} k \frac{\Delta C}{C_f} V_{d0}^2 = -\frac{k\epsilon_0 S V_{d0}^2}{\underbrace{e^2 C_f}_{=\beta}} x.$$