

MP 08/09 – D.M. de PHYSIQUE n°8 pour le 01/12/08**1^{ère} partie**

1) On dispose quatre charges ponctuelles aux sommets A , B , C , D , d'un carré de côté a .

1.a) En utilisant les plans de symétrie ou anti-symétrie éventuels déterminer la direction du champ électrique au centre O du carré et le représenter, lorsque les charges q_A , q_B , q_C et q_D sont respectivement (avec $q > 0$) : i) q, q, q, q ; ii) $q, -q, q, q$; iii) $q, -q, q, -q$; iv) $q, q, -q, -q$.

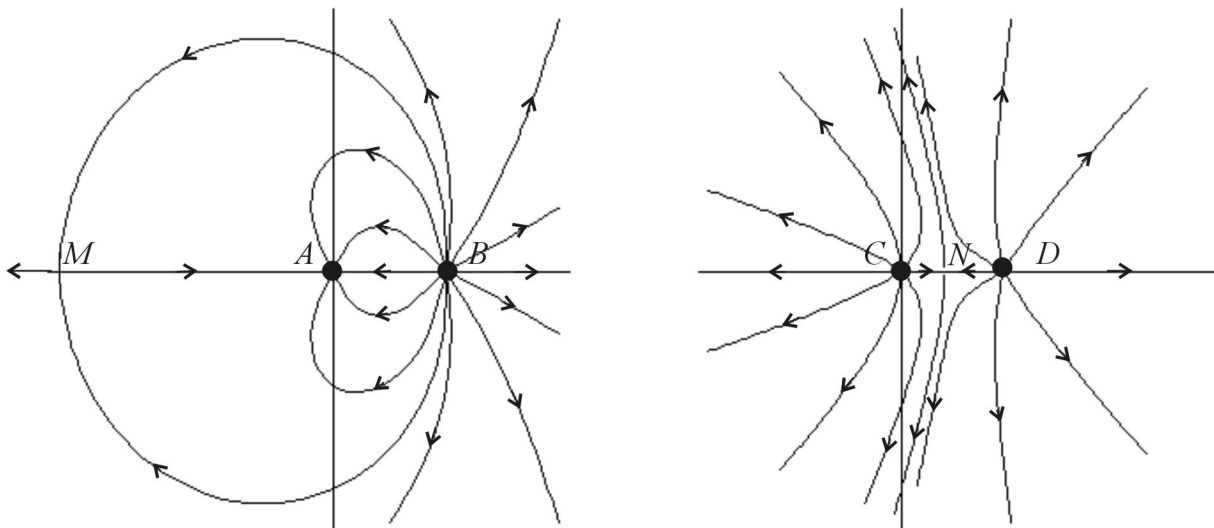
1.b) Exprimer dans chaque cas la norme du champ électrique en O .

2) Les figures ci-dessous représentent les lignes de champ (tracées à l'ordinateur) de systèmes de deux charges électriques ponctuelles placées en A et B , C et D (*ne pas tenir compte des droites verticales*).

2.a) Préciser, en justifiant clairement votre réponse, le signe des charges q_A , q_B , q_C et q_D . Donner la nature (attractive ou répulsive) de la force entre les deux charges.

2.b) Que pouvez-vous dire du champ électrique aux points M et N ? (Justifiez votre réponse).

2.c) Déterminer le rapport $\frac{q_B}{q_A}$ sachant qu'il est entier.



3) On considère une distribution de charges statiques quelconques. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. On justifiera la réponse soit en démontrant le résultat, soit en donnant un contre-exemple.

3.a) Le long d'une ligne de champ, le potentiel électrique varie de façon monotone.

3.b) Le long d'une ligne de champ la norme du champ électrique est constante.

3.c) En tout point d'une surface équipotentielle la norme du champ électrique a la même valeur.

3.d) En tout point d'une surface équipotentielle le champ électrique est orthogonal à la surface.

4)

4.a) On se place en coordonnées sphériques de centre O : on pose, pour tout point M , $r = OM$ et

$\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$. Il existe dans l'espace une distribution de charge à symétrie sphérique donnée par la densité volumique $\rho(r)$. Soit $Q_{\text{int}}(r)$ la charge contenue dans la sphère de centre O et rayon r .

i) Exprimer $Q_{\text{int}}(r)$ sous la forme d'une intégrale simple faisant intervenir $\rho(r)$.

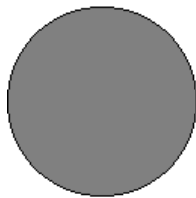
ii) Exprimer le champ électrostatique en M en fonction de $Q_{\text{int}}(r)$ et de r .

iii) On donne $\operatorname{div}(f(r)\vec{u}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 f(r))}{dr}$. Le résultat précédent vérifie-t-il l'équation de Maxwell-

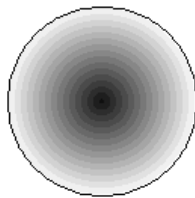
Gauss ?

4.b) On considère trois sphères de même rayon R et portant la même charge électrique totale $Q > 0$, mais avec des distributions différentes :

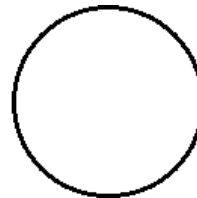
- *sphère 1* : densité volumique de charge constante dans tout le volume,
- *sphère 2* : densité volumique de charge décroissant de manière monotone du centre vers la surface de la sphère,
- *sphère 3* : charge portée uniquement par la surface de la sphère avec une densité superficielle constante.



sphère 1



sphère 2



sphère 3

On note $E_i(r)$ et $V_i(r)$ la norme du champ électrique et le potentiel que crée la sphère i à distance r de son centre lorsqu'elle est seule dans l'espace. Le potentiel électrique est pris nul à l'infini.

Comparez :

- i) $E_1(2R)$, $E_2(2R)$ et $E_3(2R)$,
- ii) $E_1(R/2)$, $E_2(R/2)$ et $E_3(R/2)$,
- iii) $V_1(0)$, $V_2(0)$ et $V_3(0)$,
- iv) $V_1(R)$, $V_2(R)$ et $V_3(R)$.

2^{ème} partie (extrait CCP 2006, option MP)

Les grandeurs scalaires sont représentées par : a, b, AB, CD

Les grandeurs vectorielles sont en caractères gras : $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{AB}, \mathbf{CD}$

En notation complexe ces grandeurs sont soulignées : $\underline{a}, \underline{b}, \underline{AB}, \underline{CD}, \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{AB}}, \underline{\mathbf{CD}}$

Notation du produit scalaire ($\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD}$) et vectoriel ($\mathbf{AB} \times \mathbf{CD}$) de deux vecteurs.

Relations d'analyse vectorielle :

f et g (fonctions scalaires); \mathbf{G} (fonction vectorielle)

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{div} \mathbf{G} + (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{G}$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{rot} \mathbf{G} + (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{G}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}(f\mathbf{G}) = \operatorname{grad} \operatorname{div}(f\mathbf{G}) - \Delta(f\mathbf{G})$$

Coordonnées sphériques: $\operatorname{grad} f$; $\operatorname{div} \mathbf{G}$; $\operatorname{rot} \mathbf{G}$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 G_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta G_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta G_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial G_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r G_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r G_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

I. Le dipôle électrostatique

1. Doublet électrostatique - Moment électrique \mathbf{p} d'un dipôle

On considère un ensemble de n charges ponctuelles q_i , situées aux points S_i dans un volume fini \mathcal{V} , telles que $\sum_{i=1}^n q_i = 0$. On désigne par $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{OS}_i$ le moment dipolaire de cette distribution, supposé non nul, O étant un point fixe appartenant à \mathcal{V} .

- Vérifier que l'expression du moment dipolaire de cette distribution est indépendante du choix de l'origine O.
- En déduire le moment dipolaire d'un doublet formé de deux charges ponctuelles ($-q$) en S_1 et ($+q$) en S_2 ($q > 0$).
- Dans la molécule HF, la distance entre le noyau d'hydrogène et le noyau de fluor vaut :
 $d = 0,92 \times 10^{-10}$ m.
 - En première approximation, on suppose le caractère ionique de la liaison H-F avec transfert de l'électron de l'hydrogène sur l'atome de fluor. Cet électron étant associé à ceux du fluor, ils forment une sphère chargée négativement, centrée sur le noyau du fluor. Effectuer l'inventaire des charges (protons, électrons) présentes au niveau des noyaux d'hydrogène et de fluor dans la molécule HF. (Numéro atomique du fluor : 9)
 - Déterminer la valeur du moment dipolaire $\|\mathbf{p}\|$, en debye (D), de la molécule supposée à liaison ionique.

Données : charge élémentaire : $1,6 \times 10^{-19}$ C

debye : $1 \text{ D} = \frac{1}{3} 10^{-29}$ C.m

- En réalité, le moment dipolaire électrique expérimental de la molécule vaut 1,83 D. On désigne par H et F les positions des noyaux d'hydrogène et de fluor respectivement, et par G le barycentre des charges électroniques de la liaison H-F. En déduire la distance FG.

2. Potentiel scalaire électrostatique $V(\mathbf{M})$

Les charges ponctuelles ($-q$) et ($+q$) d'un doublet sont placées respectivement aux points $S_1(0, 0, -\frac{a}{2})$ et $S_2(0, 0, +\frac{a}{2})$ du repère (Oxyz) (cf. figure 1).

On désigne par $p = \|\mathbf{p}\|$, le moment dipolaire du doublet, par M, un point courant de coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ sont les vecteurs de base du système de coordonnées sphériques. On pose $r_1 = \|\mathbf{S}_1\mathbf{M}\|$, $r_2 = \|\mathbf{S}_2\mathbf{M}\|$, $r = \|\mathbf{OM}\|$ et $r = \mathbf{OM}$

- Exprimer le potentiel électrostatique $V(\mathbf{M})$ créé par le doublet, au point M, en fonction de q, r_1 et r_2 .
- Etablir son expression $V_d(\mathbf{M})$, pour un point M éloigné du doublet ($r \gg a$), en fonction de r, r et \mathbf{p} .

3. Champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{M})$

a. Montrer que $\mathbf{grad}_M(1/r^3)$ et $\mathbf{grad}_M(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ s'expriment en fonction de r, \mathbf{r} ou \mathbf{p} .

b. Déduire du potentiel $V_d(\mathbf{M})$ du dipôle, le champ électrostatique $\mathbf{E}(\mathbf{M})$ sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{k_1(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} \right] \text{ où } k_1 \text{ est un facteur numérique que l'on calculera.}$$

- c. Déterminer les composantes (E_r, E_θ, E_φ) du champ $E(M)$ en coordonnées sphériques.
- d. La direction du champ en M est repérée par l'angle $\beta = (\mathbf{e}_r, E(M))$. Quelle est alors la relation entre les angles β et θ ?
- e. Calculer, dans le plan (yOz) limité au domaine $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'angle $\theta = \theta_1$ correspondant à un champ $E(M)$ parallèle à l'axe Oy.

4. Equipotentiels et lignes de champ

- a. Qu'appelle-t-on surfaces équipotentiels ? Donner leur équation en coordonnées polaires pour ce dipôle.
- b. Qu'appelle-t-on lignes de champ ? Donner leur équation en coordonnées polaires.
- c. Tracer, dans le plan (yOz) limité au domaine $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'allure de deux lignes équipotentiels ($V_1 > 0$ et $V_2 > V_1$) et de deux lignes de champ.

5. Action d'un champ électrique extérieur uniforme E_e .

On applique dans l'espace un champ extérieur E_e .

- a. Exprimer en fonction de p et de E_e , la force résultante R_f et le moment du couple Γ s'exerçant sur le dipôle.
- b. L'énergie d'interaction U entre le dipôle et le champ extérieur E_e étant définie par :
 $U = -p \cdot E_e$, étudier les orientations d'équilibre du dipôle et préciser leur stabilité.

3^{ème} partie facultative pour les 3/2 (extrait CCP 1998, option MP)

1. Conducteur en régime stationnaire. Charge surfacique.

1.a) A l'intérieur d'un conducteur, au voisinage de sa surface, le champ électrique en régime stationnaire satisfait à l'équation différentielle : $\Delta \vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$ où λ_D est une longueur caractéristique du matériau,

appelée longueur de Debye, qui est de l'ordre de quelques nanomètres pour un conducteur usuel. La surface du conducteur est supposée plane et l'axe Ox est choisi selon sa normale (Figure 1). Trouver la répartition spatiale du champ électrique, puis celle de la charge volumique ρ , lorsque le champ extérieur (dans le vide, sans charge) au voisinage de cette surface vaut $E_0 \vec{e}_x$, \vec{e}_x étant le vecteur unitaire porté par l'axe Ox . On admettra que, loin de cette surface, le champ à l'intérieur tend vers sa valeur d'équilibre électrostatique dans un conducteur (en électrostatique le champ électrique est nul dans le volume d'un conducteur, ce résultat sera démontré en cours).

1.b) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$. Exprimer $\rho_0 = \rho(0)$ en fonction de E_0 et λ_D .

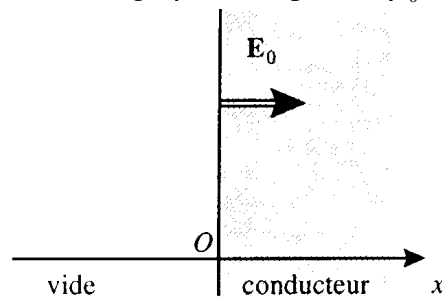


Figure 1

1.c) Pour un échantillon de taille macroscopique, il est alors commode d'introduire la charge surfacique σ du conducteur. Exprimer σ en fonction de ρ_0 et de λ_D , puis en fonction de E_0 et de ϵ_0 .

2. Description électrique d'un matériau dans un champ appliqué

Un échantillon sphérique de rayon R , d'un matériau homogène, plongé dans le vide, est soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}_a = E_a \vec{e}_z$ (Figure 2a). Sous l'action de ce champ, il apparaît des charges à la surface de la sphère donc la répartition est décrite par la densité $\sigma(M) = \sigma_0 \cos \theta$, où θ désigne l'angle $(\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$.

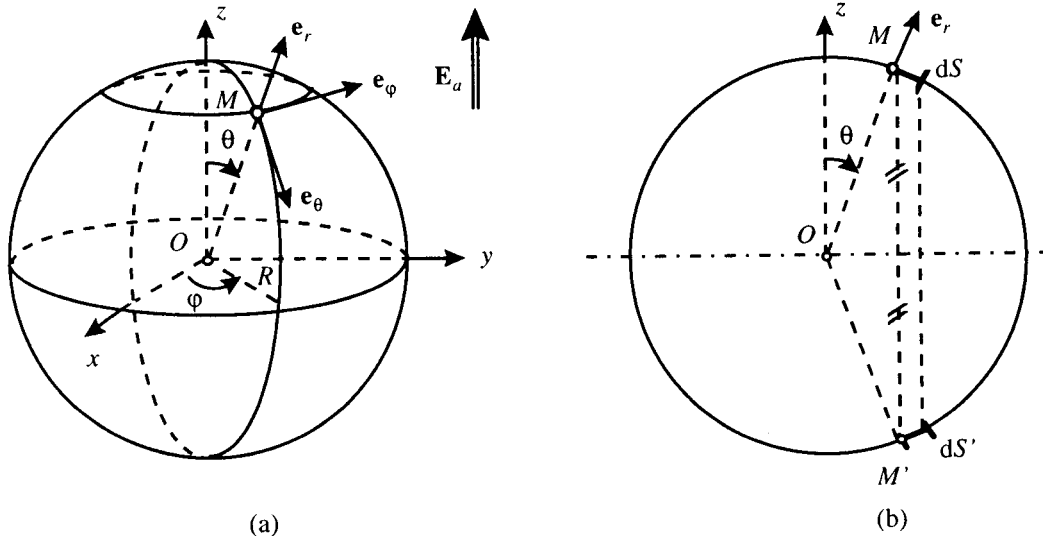


Figure 2

2.a) Calculer le champ électrique \vec{E}_m créé par une telle distribution de charge, au centre O de la sphère ; on utilisera des propriétés de symétrie pour en prévoir la direction. Dans la suite, on admet que ce champ est uniforme à l'intérieur de cette sphère. Trouver sa valeur en fonction de σ_0 et de la permittivité du vide ϵ_0 . En déduire l'expression du champ électrique résultant \vec{E} à l'intérieur du matériau (ce champ est créé par les charges qui créent \vec{E}_a et les charges surfaciques qui sont apparues sur la sphère).

2.b) On assimile la distribution de charge précédente à un ensemble de dipôles électrostatiques, en associant deux à deux les éléments de surface dS et dS' symétriques par rapport au plan équatorial $z = 0$ (Figure 2b). Calculer le moment dipolaire \vec{dp} d'un tel doublet, puis le moment dipolaire électrique total \vec{p} de la distribution. En déduire le moment dipolaire volumique \vec{P} . exprimer sa valeur en fonction de σ_0 . Quelle relation lie alors \vec{E} , \vec{E}_a et \vec{P} ?

2.c) Le matériau est conducteur, Trouver la relation à l'équilibre entre \vec{P} et le champ appliqué \vec{E}_a . La nature physique du conducteur intervient-elle ? Commenter.

C. ÉTUDE DE LA RÉACTION D'OXYDATION DU DIOXYDE DE SOUFRE

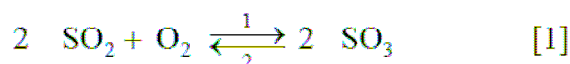
Données spécifiques à la partie C

- $T \text{ (K)} = \theta \text{ (}^\circ\text{C)} + 273,15$ $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,3145 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Pression standard de référence : $P^\circ = 1 \text{ bar}$
- Tous les composés sont des gaz parfaits dont la capacité calorifique est considérée indépendante de la température.

Propriétés thermodynamiques des composés dans l'état gaz parfait

Composé	Enthalpie standard de formation $\Delta_f H_{25^\circ\text{C}}^\circ \text{ (J}\cdot\text{mol}^{-1}\text{)}$	Entropie molaire standard $S_{25^\circ\text{C}, 1 \text{ bar}}^\circ \text{ (J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\text{)}$	Capacité calorifique molaire isobare $C_p^\circ \text{ (J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\text{)}$
SO ₂	- 296 800	248,0	47,8
O ₂	0	205,0	31,6
SO ₃	- 395 700	256,4	65,3
N ₂	0	191,5	29,8

En phase gazeuse l'oxydation du dioxyde de soufre conduit à la formation de trioxyde de soufre selon la réaction équilibrée ci-dessous :

C-1. Calculer à $T_0 = 298,15 \text{ K}$:C-1-1. L'enthalpie standard de la réaction [1] : $\Delta_r H^\circ(T_0)$.C-1-2. L'enthalpie libre standard de la réaction [1] : $\Delta_r G^\circ(T_0)$.C-1-3. La constante d'équilibre $K^0(T_0)$.C-2. Calculer à $T_1 = 750 \text{ K}$ l'enthalpie standard de la réaction [1] : $\Delta_r H^\circ(T_1)$.

C-3. Un système constitué de dioxyde de soufre, de dioxygène et de trioxyde de soufre, est à l'équilibre à la température T_1 . Quand on élève la température, à pression constante, la réaction [1] évolue-t-elle dans le sens 1 ou dans le sens 2 ? Justifier brièvement votre réponse.

C-4. En justifiant brièvement votre réponse, indiquer qualitativement l'influence, à température constante, de la pression totale sur le taux de conversion à l'équilibre du dioxyde de soufre.

C-5. À la température $T_1 = 750 \text{ K}$, la constante d'équilibre de la réaction [1] est $K^0(T_1) = 10\,050$. Déduire de la valeur de la constante d'équilibre la valeur de l'enthalpie libre standard de la réaction [1] à la température T_1 : $\Delta_r G^\circ(T_1)$.

C-6. Un mélange est initialement constitué par 100 moles de dioxyde de soufre et par 50 moles de dioxygène. La réaction [1] conduit, sous la pression P_1 et à la température $T_1 = 750 \text{ K}$, à un état d'équilibre caractérisé par un avancement $\xi_1 = 48$ moles.

C-6-1. Calculer la quantité de matière de chaque composé à l'équilibre.

- C-6-1. Calculer la quantité de matière de chaque composé à l'équilibre.
- C-6-2. Exprimer les pressions partielles P_{SO_3} , P_{SO_2} et P_{O_2} en fonction de la pression totale P_1 .
- C-6-3. Calculer, à partir de la constante d'équilibre $K^0(T_1)$, la valeur numérique de la pression P_1 .

C-7. Un mélange gazeux sortant d'un four a la composition molaire suivante : 8 % de dioxyde de soufre, 12 % de dioxygène et 80 % de diazote. Ce mélange gazeux est introduit en continu dans un convertisseur fonctionnant en régime stationnaire et à pression constante au sein duquel l'oxydation de SO_2 en SO_3 est réalisée selon la réaction [1]. Le diazote se comporte comme un gaz inerte. Pour traiter ce problème (parties C-7-1 et C-7-2) on considérera 100 moles de mélange gazeux à l'entrée du convertisseur à la température $T_1 = 750 \text{ K}$.

- C-7-1. Le convertisseur fonctionnant de façon isotherme à la température $T_1 = 750 \text{ K}$, on observe que 98 % du SO_2 est oxydé en SO_3 .
- C-7-1-1. Déduire du taux de conversion du SO_2 , la quantité de matière de chaque constituant à la sortie du convertisseur.
- C-7-1-2. Quelle est la valeur de l'avancement ξ_2 de la réaction [1] ?
- C-7-1-3. Exprimer, en fonction de la pression P_2 régnant dans le convertisseur, les diverses pressions partielles à sa sortie : P_{SO_3} , P_{SO_2} , P_{O_2} et P_{N_2} .
- C-7-1-4. En considérant que l'état d'équilibre est établi à la sortie du convertisseur, déterminer la valeur de la pression de fonctionnement P_2 .
- C-7-1-5. Calculer la chaleur échangée par le convertisseur avec l'extérieur.
- C-7-2. On considère maintenant un convertisseur fonctionnant de façon adiabatique sous une pression constante égale à 1 bar. Le mélange gazeux étant toujours introduit à 750 K, on observe que 60% du SO_2 est oxydé en SO_3 .
- C-7-2-1. Quelle est la valeur de l'avancement ξ_3 de la réaction [1] ?
- C-7-2-2. Déduire de la valeur de l'avancement ξ_3 et du bilan énergétique, la valeur de la température T_2 des gaz à leur sortie du convertisseur.
- C-7-2-3. Calculer le quotient réactionnel π de la réaction [1] à la sortie du convertisseur.
- C-7-2-4. Calculer la constante d'équilibre $K^0(T_2)$ de la réaction [1] à la température T_2 .
- C-7-2-5. Comparer les valeurs de π et de $K^0(T_2)$ et conclure.