ALGEBRE
Chapitre 3

Dualité en dimension finie

I) Généralités

1) E Kev (Kcc)

Def Une forme linéaire sur E est une AL de E vers K.
$\mathcal{L}(E,K) = E^*$ dual de E

Prop 1 Si E Kevdf, $\dim E = n \geq 1$
• Alors E^* de dim n
•• Si $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n-1$; $\operatorname{Im} \varphi = K$.

Démo $\varphi \neq 0$ $\begin{cases} \operatorname{Im} \varphi \neq \{0\} \\ \text{sev de } K, \dim K = 1 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Im} \varphi = K$, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n-1$

$\Longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi$ HP

Prop 2 Si E Kev
(1) Si $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ alors $\operatorname{Ker} \varphi$ HP de E
et $\forall a \in E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$, $E = \operatorname{Ker} \varphi \oplus Ka$
(2) Soient $\varphi, \psi \in E^*$. $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in K, \psi = \lambda \varphi$

Démo (1) $\varphi \neq 0$, $a \in E$ tq $\varphi(a) \neq 0$ ie $a \notin \operatorname{Ker} \varphi$
$D = Ka$, $H = \operatorname{Ker} \varphi$, $x \in E$, trouver $\lambda \in K$ tq
$\begin{cases} h = (x - \lambda a) \in \operatorname{Ker} \varphi \\ \varphi(h) = \varphi(x) - \lambda \varphi(a) = 0, \quad \lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \end{cases}$
$\Longrightarrow x = (x - \lambda a) + \lambda a \in H + D \Longrightarrow E = H + D$
$H \cap D = \{0\}$ car $a \notin H$ si $h = \lambda a$, $\varphi(h) = 0 = \lambda \underbrace{\varphi(a)}_{\neq 0}$ $\lambda = 0$ $h = 0$

(2) NB $\varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = E$ $\varphi = 0, \psi \neq 0$

$\Leftarrow$ évident $\psi(x) = \lambda \varphi(x)$, $\lambda \neq 0$ $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$, $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi$

$\Rightarrow$ $a \in E - \operatorname{Ker} \varphi$ (1) $\Rightarrow \operatorname{Ker} \varphi \oplus Ka = E$
$x \in E$ $x = h + \mu a$, $\begin{cases} h \in \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi \\ \mu \in K \end{cases}$ $\begin{cases} \varphi(x) = \mu \varphi(a) \\ \psi(x) = \mu \psi(a) \end{cases}$ $\psi = \overbrace{\dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}}^{\lambda \neq 0} \cdot \varphi$

Rem E Kev qcq tout on connait 1 base $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$

$x \in E$ décomposable sous la forme $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$ où $x_i \in K$ $\forall i \in I$

avec $J = \{ i \in I / x_i \neq 0 \}$ fini

$j \in I$ $\varphi_j = e_j^*$ dans E^*

$x = \sum_{i \in I} x_i e_i \longmapsto x_j$ "j ième forme coordonnée"

On peut considérer $\mathcal{B}^* = (\varphi_i)_{i \in I}$ libre dans E^*

$\forall i \in I$ $\varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$

relation de dépendance $\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i = 0$ où $(\lambda_i) \in K^I$ à sup fini

valeur en $e_j \Rightarrow \lambda_j = 0$ $\forall j \in I$

Si E kev df I fini $\operatorname{Card} \mathcal{B} = \operatorname{Card} \mathcal{B}^* = \dim E$

$\mathcal{B}^*$ base de E^*

Si E non df, $\mathcal{B}^*$ non génératrice

$\varphi : \sum_{i \in I} x_i b_i \mapsto \sum x_i$ $\varphi \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{B}^*)$ Abandon!

II Dualité en df

E Kev df $\dim E = n \geq 1$

Introduction calcul analytique :

$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base de E

$\varphi \in E^*$ $\varphi : \underset{\mathcal{B}}{E} \longrightarrow \underset{(1)}{K}$ ← base canonique de K

$L = \operatorname{Mat}(\varphi ; \mathcal{B}, (1)) = (a_1 \ldots a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(K)$

$\varphi(b_i) = a_i \in K$

$x \in E$ $X = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ie $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$

$\varphi(x) = L \times X = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

$\operatorname{Ker} \varphi$ d'éqn ds $\mathcal{B}$ $\sum a_i x_i = 0$

$\varphi \neq 0$ ie $L \neq 0$

$H = \operatorname{Ker} \varphi$ HP de E

1) Base duale d'1 base de E

Déf / Prop Soit E kev df et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E

On considère $\varphi_i = e_i^* : \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_i$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

Alors $B^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de E^* dite base duale de E.

Démo $\left\{\right.$ B^* libre (calcul précédent) et $\mathrm{Card}\, B^* = n = \dim E^*$

NB $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = B^*$ famille des formes coordonnées dans B.

Caractérisation, Formulaire

$\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$

$\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$

$\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i$

Rem $E = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}$ base canonique : $\mathcal{C}^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

Ex 1 $E = \mathbb{R}_n[X]$ $P_k = (X-1)^k$ $k \in \mathbb{N}$

$B = (P_0, \ldots, P_n)$ base de E ? B^* ?

- B échelonnée en degré $\longrightarrow$ base ✓
- Taylor : $\forall P \in E$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$

$B^* = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$

avec $\varphi_k : P \mapsto \frac{P^{(k)}(1)}{k!}$

Ex 2 $E = \mathbb{R}_n[X]$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 2 à 2 distincts

$L_i(X) = \prod_{\substack{j \in [\![0, n]\!] \\ j \neq i}} \frac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$. $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ base ? $\mathcal{L}^*$?

- Interpolat° de Lagrange, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ ...
- $\forall P \in E$, $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(X)$

$\mathcal{L}^* = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ avec $\varphi_k : P \mapsto P(a_k)$

2) Base préduale / antéduale d'1 base de E^*

Préliminaire E kevdf $\dim E = n$

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de E^*

$\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$

Considérons ▸ Si $\mathcal{B}$ base de E $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

$$u_{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} \varphi \longmapsto (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \\ E^* \longrightarrow K^n \end{array}$$

▸ Si $\phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de E^*

$$v_\phi : \begin{array}{l} x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \\ E \longrightarrow K^n \end{array}$$

si $\phi = \mathcal{B}^*$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$

$v_\phi(\mathcal{B}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base canonique de K^n

Prop E kevdf, $\dim E = n$ alors $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^*$ est une bijection de l'ens des bases de E sur l'ens des bases de E^* -

ie si $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}^*$ base de E^* (base duale de $\mathcal{B}$)

Rec ϕ base de E^*, $\exists !$ base $\mathcal{B}$ de E tq $\mathcal{B}^* = \phi$

$\mathcal{B}$ base antéduale de ϕ

Démo On part de $\phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de E^*

soit $v : \begin{array}{l} x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \\ E \longrightarrow K^n \end{array}$ Ker v ?

Lemme si $x \in E \setminus \{0\}$ $\exists \varphi \in E^* \,/\, \varphi(x) = 1$

$x \neq 0$, $V_1 = x$ complétée en $\mathcal{C} = (V_1, \ldots, V_n)$ base de E

$\mathcal{C}^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ $\psi_1(V_1) = 1$ $\varphi = V_1$

Si $x \in \operatorname{Ker} v$, si $x \neq 0$ on pourrait trouver $\varphi \in E^*$ tq $\varphi(x) = 1$, ϕ base de E^*, $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$, $\varphi(x) = 0 = 1$

ccl Ker $v = \{0\}$

$\Rightarrow v$ inj, $\dim E = n = \dim K^n \Rightarrow$ v bij

$\mathcal{B} = v^{-1}(\mathcal{E})$ $\mathcal{E}$ base can de K^n convient, $\mathcal{B}$ unique

Csq v isomorphisme de E sur K^n

Cherchons B tq $B^* = \phi$ équivalent à $v(B) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base canonique de K^n

$\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$

$v(e_j) = (\varphi_1(e_j), \ldots, \varphi_n(e_j)) = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, \ldots, 0)$

v^{-1} isomorphisme de K^n sur E

$\rightarrow$ définir $B = v^{-1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (e_1, \ldots, e_n)$, on a bien $B^* = \phi$

B unique : B, B' deux candidats tq $B^* = B'^*$

$\forall (i,j)\ \varphi_i(e_j - e'_j) = 0 \Rightarrow e_j - e'_j = 0$ cf lemme

<u>CSQ</u> E kev dim n

* $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, on lui associe $\phi = B^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base duale de E^*

** $\phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de E^*, on lui associe B base de E antéduale de ϕ tq $B^* = \phi$

<u>Caractérisation</u> $B^* = \phi$ caractérisée $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\ \ \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$

<u>Formulaire</u> $\forall x \in E,\ x = \sum_1^n \varphi_i(x) e_i$, $\forall \varphi \in E^*\ \ \varphi = \sum_1^n \varphi(e_i) \varphi_i$

<u>Lemme utile</u> $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_r) \in E^r$ et $\psi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in (E^*)^r$ tq $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}\ \ \forall (i,j) \in [\![1,r]\!]$

Alors $\mathcal{E}$ libre ds E et ψ libre ds E^*

<u>Démo</u> $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0$ appliquer φ_j $\lambda_j = 0$ $\square$

$\sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_i = 0$ ——— en e_j $\lambda_j = 0$

<u>Exemple</u> (retour sur l'interpolation de Lagrange)

$n+1$ elts de K 2 à 2 distincts $a_0, \ldots, a_n$; $E = K_n[X]$

Soit $\varphi_i : \begin{array}{l} P \longmapsto P(a_i) \\ E \longrightarrow K \end{array}$, $0 \leq i \leq n$

Mq $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = \Phi$ base de E^*, base antéduale ?

$\rightarrow$ Il suffit de trouver $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n) \in E^{n+1}$ tq $\varphi_i(L_j) = \delta_{ij}$

L_i tq $L_i(a_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ $L_i(X) = \prod_{\substack{j \in [\![0,n]\!] \\ j \neq i}} \frac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$

<u>$\mathcal{L}$ libre</u> $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$, valeur en a_j : $\lambda_j = 0$

Φ libre aussi

$\mathcal{L} / \Phi$ base : $\mathcal{L}^* = \Phi$

<u>Ex</u> $a_0, —, a_n$ $n+1$ réels 2 à 2 distincts non nuls

$E = \mathbb{R}_n[X]$

soit $\varphi_i : P \longmapsto \int_0^{a_i} P(t)\,dt$

$E \longrightarrow \mathbb{R}$

Mq $\Psi = (\varphi_1, —, \varphi_n)$ base de E^*, antéduale ?

Exhibons une famille $\mathcal{B} = (P_0, —, P_n) \in E^{n+1}$ tq $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$

ie $\int_0^{a_i} P_j(t)\,dt = \delta_{ij}$, soit Q_j la primitive de P_j s'annulant en 0

$\Rightarrow$ $Q_j(a_i) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow$ on $Q_j(X) = \frac{X}{a_j}\left(\prod_{\substack{i \in [0,n] \\ i \neq j}} \frac{(X - a_i)}{a_j - a_i}\right)$

Donc Ψ libre dans E^* et $\mathcal{B}$ libre ds E

$\sum \lambda_i \varphi_i = 0$ en P_j : 0 $\Rightarrow \lambda_i = 0$

$\sum \lambda_i P_i = 0$ on applique φ_j $\Rightarrow \lambda_i = 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}^* = \Psi$

3) <u>Calculs sur les HP</u>

E ker dif $n \geq 1$

H HP de E

$\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ tq $H = \ker \varphi$

famille de p HP $H_1, —, H_p$ avec $H_i = \ker \varphi_i$
$1 \leq p \leq n$

$F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$

<u>1e cas</u> $(\varphi_1, —, \varphi_r)$ libre ds E^*

$G = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i$, dim G ?

$(\varphi_1, —, \varphi_r)$ complétée en $\Phi = (\varphi_1, —, \varphi_r, \varphi_{r+1}, —, \varphi_n)$ base de E^*

on lui associe $\mathcal{B} = (e_1, —, e_n)$ base de E

$x \in E \quad x = \sum_1^n \varphi_i(x) e_i$

$x \in G \iff \forall i \in [\![1, r]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$

<u>ccl</u> $G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de dimension $n - r$ –

<u>Rem</u> cf calcul analytique

eqn ds $H_1, \ldots, H_r$ de G ds B

si $\varphi_k : \sum_1^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$

$$G \begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ \quad | \\ a_{r1} x_1 + \ldots + a_{rn} x_n = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ | & \ddots & | \\ a_{r1} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \text{ de rg } r \leq n$$

cf $V : x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$ ...

<u>2e cas</u> $\mathrm{rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = r \quad r \leq p$

quitte à permuter les fcts, on peut supposer $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ libre

et $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_p \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$

cf $F = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}\, \varphi_i = \underbrace{\bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\, \varphi_i}_{G}$

cf $\varphi_{r+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i \varphi_i \qquad x \in F,\ \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_r(x) = 0 \Rightarrow \varphi_{r+1}(x) = 0$

$\mathrm{Ker}\, \varphi_{r+1} \supset G$

<u>Propriété</u> Soit E Kev df $n \geq 1$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in E^*$, $F = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}\, \varphi_i$

alors $\mathrm{rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = r \iff \dim F = n - r$

si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ libre, $\varphi \in E^*$, alors φ s'annule sur

$\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}\, \varphi_i = F$ ssi $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

Démo – début ...

– $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ libre complétée en $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ base de E^*

de base antéduale $(e_1, \ldots, e_n)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$

$\varphi \in E^*,\ \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \quad \lambda_i = \varphi(e_i)$

$\forall x \in F,\ \varphi(x) = 0 \iff \forall i \in [\![r+1, n]\!]\ \varphi(e_i) = 0$

$$\Leftrightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{r} \varphi(e_i)\varphi_i \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

__Exemple__ $E = \mathbb{R}^3$, base can $\mathcal{C}$

H_1 d'éqn ds $\mathcal{C}$ $\quad x + 2y - z = 0$

H_2 ——— $\quad x + z = 0$

1) $F = H_1 \cap H_2$ dim F ? 2) déterminer 1 plan vect de P de E contenant F et $u = (1,1,1)$ –

$\varphi_1 : (x,y,z) \mapsto x + 2y - z \qquad H_1 = \mathrm{Ker}\, \varphi_1$

$\varphi_2 : (x,y,z) \mapsto x + z \qquad H_2 = \mathrm{Ker}\, \varphi_2$

(φ_1, φ_2) libre : $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0$ en $(0,1,0)$ $2\lambda_1 = 0$, en $(1,0,1)$ $\lambda_2 = 0$

$\mathrm{rg}(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \Rightarrow \dim F = 3 - 2 = 1$

2) P d'éqn ds $\mathcal{C}$ $ax + by + cz = 0$ ie $P = \mathrm{Ker}\, \varphi$

avec $\varphi : (x,y,z) \mapsto ax + by + cz$

$P \supset F \qquad \exists\, \alpha, \beta,\ \varphi = \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2$

$\varphi(u) = 0$; $2(\alpha + \beta) = 0 \qquad \beta = -\alpha$

$\varphi : (x,y,z) \mapsto 2\alpha[y - z] \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow P$ d'éqn $y - z = 0$

__Exercice__ Formule des 3 niveaux

$a, b, c \in \mathbb{R}$; $E = \mathbb{K}_3[X] \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

$\varphi_1 : P \mapsto P(a) \qquad \varphi_2 : P \mapsto P(b) \qquad \varphi_3 : P \mapsto P(c)$

$\varphi_4 : P \mapsto \int_a^b P(t)\,dt$ – Mq :

1) $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ libre ds E^* ssi a, b, c 2 à 2 distincts

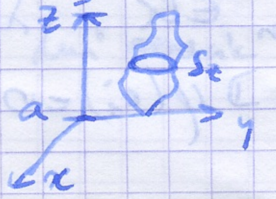
2) $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ ——— et $c \neq \frac{a+b}{2}$

3) On prend $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ et $c = \frac{a+b}{2}$

mq $\forall P \in \mathbb{K}_3[X]$, $\int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{6}\left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right]$

__Rem__ volume de domaine du type $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} a \leq z \leq b \\ (x,y) \in D_z \end{array}\right\}$

aire $D_z = S(z)$ $\quad S$ PN de degré ≤ 3



$$\mathrm{Vol}(D) = \frac{b-a}{6}\left(S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right)$$

(3)

1) si on a égalité entre 2 alors liés

réc[t] si $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$

$P \in \bigcap_{i=1}^{3} \ker \varphi_i \Leftrightarrow (X-a)(X-b)(X-c) / P$

$$F = \{ \lambda (X-a)(X-b)(X-c) / \lambda \in K \}$$

$\dim F = 1 = 4 - rg(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (généré par 1 seul PN)

2) a, b, c 2 à 2 distincts

$G = \bigcap_{i=1}^{4} \ker \varphi_i = \{ \lambda (X-a)(X-b)(X-c) / \lambda \int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,dt = 0 \}$

$\lambda \int_a^b (t-a)(t-b)(t-c)\,dt = (a-b)^3 \dfrac{(a+b-2c)}{12}$

$(\varphi_1, \dots, \varphi_4)$ libre $\Leftrightarrow \dim G = 0$ $(4-4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c \text{ 2 à 2 distincts} \\ a+b \neq 2c \end{cases}$

3) Donc pour $a \neq b$, $c = \dfrac{a+b}{2}$, $\varphi_4 \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

$\exists \alpha, \beta, \gamma \in K$ tq $\forall P \in E$, $\int_a^b P(t)\,dt = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$

Méth 1 $P = 1$, $P = X$, $P = X^2$ système ...

Méth 2 $P = 1$, $P = X - a$, $P = (X-a)^2$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = b - a \\ \beta(b-a) + \gamma(c-a) = \dfrac{(b-a)^2}{2} \\ \beta(b-a)^2 + \gamma(c-a) = \dfrac{(b-a)^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma = \dfrac{b-a}{6} \\ \beta = \dfrac{4}{6}(b-a) \end{cases} \square$$

Remarque finale (HP)

- orthogonalité
$$E^* \times E \longrightarrow K \quad \text{appli bilinéaire}$$
$$(\varphi, x) \longmapsto \varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$$

φ et x "orthogonaux" si $\varphi(x) = 0$

- transposée d'1 AL

A $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on associe ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tq $\forall \varphi \in F^*$, ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$