Algèbre
Chapitre 6

# Formes Quadratiques

Sup : espaces euclidiens

## I] Formes quadratiques

ici $E$ $\mathbb{R}$-ev

**Def 1** $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est dite forme bilinéaire si
$\forall x \in E$, $f(x, \cdot) : \begin{array}{l} y \mapsto f(x,y) \\ E \to \mathbb{R} \end{array}$ linéaire (ds $E^*$)
et $\forall y \in E$, $f(\cdot, y) : \begin{array}{l} x \mapsto f(x,y) \\ E \to \mathbb{R} \end{array}$ linéaire (ds $E^*$)

de plus dite sym si $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = f(y,x)$

On notera $BS(E)$ l'ens des formes bilinéaires sym sur $E$
c'est 1 $\mathbb{R}$-ev. (sev de $\mathcal{A}(E^2, \mathbb{R})$)

**Calcul fondamental** $f \in BS(E)$
$f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y)$
$\left( f(x-y, x-y) = \text{———} - \text{———} + \text{———} \right)$

**Def / Prop** Soit $q : E \to \mathbb{R}$. ODQ $q$ forme quadratique sur $E$ s'il existe 1 forme bilinéaire sym $f : E^2 \to \mathbb{R}$
tq $\forall x \in E$, $q(x) = f(x,x)$
Dans ce cas $f$ unique (forme polaire associée à $q$)
calculable par l'1 des 2 identités de polarisation
$\forall (x,y) \in E^2$ $f(x,y) = \frac{1}{2}\left[ q(x+y) - q(x) - q(y) \right]$
$= \frac{1}{4}\left[ q(x+y) - q(x-y) \right]$

pk quadratique ?
$q(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 q(x)$ → forme non linéaire mais quadratique

Algèbre bilinéaire

**Ex** $E = \{ f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \,/\, f(0) = f(1) = 0 \}$

$q : \begin{cases} f \longmapsto \int_0^1 f f'' \\ E \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

IPP : $q(f) = \cancel{[f f']_0^1} - \int_0^1 f'^2 = -\int_0^1 f'^2$ , recherchons par polarisation

$B(f,g) = -\int_0^1 \frac{(f'+g')^2 - (f'-g')^2}{4} = -\int_0^1 f' g'$

B ainsi défini est bilinéaire et symétrique

**Prop** $E$ $\mathbb{R}$-ev, on notera :

$BS(E)$ ens des forme bilinéaire sym

$Q(E)$ ens des formes quadratiques sur $E$

Ce sont des $\mathbb{R}$-ev et $\Phi : \begin{cases} f \longmapsto (x \overset{Q}{\longmapsto} f(x,x)) \\ BS(E) \longrightarrow Q(E) \end{cases}$ est 1 isomorp.

**démo** $BS(E)$ sev de $\mathcal{A}(E^2, \mathbb{R})$

$Q(E)$ —— $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$

soient $f_1, f_2 \in BS(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ; $\lambda f_1 + f_2 \in BS(E)$

soient $q_1$ associée à $f_1$, $q_2$ associée à $f_2$ $\quad (q_i(x) = f_i(x,x))$

alors $\lambda q_1 + q_2$ associée à $\lambda f_1 + f_2$ donc $\Phi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda q_1 + q_2$

$\Phi$ linéaire et $\Phi$ bijective : $f \mapsto q_f$ association = bijection

## (b) Formes positives, définies positives

**Def** $E$ $\mathbb{R}$-ev $\quad q \in Q(E)$, $f \in BS(E)$ associées

ODQ $q$ (ou $f$) est positive si $q(E) \subset \mathbb{R}_+$ ie

$\forall x \in E$, $q(x) = f(x,x) \geq 0$

ODQ $q$ est définie si $\forall x \in E$, $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

**NB** $q$ est définie positive équivaut à $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$

**Notation** $Q_+(E)$ ens des forms quad positives

$Q_{++}(E)$ —————————— définies positives

**Rem** Relations d'ordre (partiel) sur $Q(E)$

$q_1, q_2 \in Q(E)$

$q_1 \leq q_2 \iff \forall x \in E, \; q_1(x) \leq q_2(x)$

$\iff q_2 - q_1 \geq 0$

**partiel** : $\boxed{ex}$ $q : \begin{array}{|l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,x') \mapsto x^2 - x'^2 \end{array}$ $F : E^2 \to \mathbb{R}$ fbs associée ?
$(X, Y)$
$X = (x, x')$ ; $Y = (y, y')$

$$F : (X, Y) \mapsto xy - x'y'$$

on a bien $F(X, X) = Q(X)$

$\left.\begin{array}{l} F \text{ linéaire à gauche} \\ F \text{ sym} \end{array}\right| \text{bs}$

sym : trivial, linéaire à gauche ...

**mais** $q$ n'est ni positive ni négative, incomparable avec $q_2 = 0$ : $\begin{array}{|l} q(1,0) = 1 > 0 \\ q(0,1) = -1 < 0 \end{array}$

**Rem** $Q_+(E)$ n'est pas 1 $\mathbb{R}$ ev. C'est stable par +

mais $\begin{array}{|l} q \in Q_+(E) \Rightarrow -q \in Q_-(E) \\ \text{stable par lcc mi } \lambda > 0 \end{array}$

**Def Produit scalaire réel**

Soit $E$ $\mathbb{R}$ ev, $f : E^2 \to \mathbb{R}$ - ODQ $f$ est 1 produit scalaire sur $E$ si $f$ est 1 forme
- bilinéaire
- sym
- définie positive

$(E, f)$ | dit alors espace préhilbertien réel
| est dit euclidien si $E$ est de plus de df.

**Notations** PS : $( \cdot | \cdot )$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$

**Rem économique** ① $f$ BS $\begin{array}{|l} \text{linéaire à gauche (1)} \\ \text{— droite (2)} \\ \text{sym (3)} \end{array}$

on a $(1) + (3) = (1) + (2) + (3)$

(2) Définie Positive ) $\Rightarrow \forall x \in E,\ f(x,x) > 0$

## II ) Etude en df

Soit $E$ $\mathbb{R}$ev df. $n \geq 1$, $q \in Q(E)$, $f \in BS(E)$ associée

**Calcul préliminaire** soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $E$

$x, y \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad , y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$f(x,y) = f\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right) = \sum x_i f(e_i, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j)$$

introduire $A = \left(f(e_i, e_j)\right)_{(i,j) \in [1,n]}$ soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_B(x)$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_B(y)$

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} f(e_i, e_j)\ y_j\right)}_{[A.Y]_i}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x,y) = {}^tX A Y}$$

**Def / Prop** Soit $E$ $\mathbb{R}$ev df $n$, $f \in BS(E)$ et $q \in Q(E)$ associés

Etant donné 1 base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$,

on définit $A = M_B(f) = M_B(q) = (a_{ij})$ (mat ass à $f$ ou à $q$ ds $B$) ; par $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ pour tout $(i,j) \in [1,n]$

on a $f(x,y) = {}^tX A Y$ ; $q(x) = {}^tX A X$

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_B(x) \\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_B(y) \end{cases}$$

**Conséquences, remarques**

(1) $A \in S_n(\mathbb{R})$ (matrice de $M_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tA = A$)

car $f$ est symétrique : $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$

(2) calcul analytique

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$$

$y = x \Rightarrow q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$

Si on connaît $q$, reconstruire $f$ : règle du dédoublement :

$a_{ii} x_i^2 \longrightarrow a_{ii} x_i y_i$

$2 a_{ij} x_i x_j \longrightarrow a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$
$(i<j)$

$\boxed{Ex}$ $E = \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}$ base can $X = (x, y, z)$ $X' = (x', y', z')$

$Q(X) = x^2 + y^2 - 4z^2 + 2xy + 4yz$

$F(X, X') = xx' + yy' - 4zz' + xy' + x'y + 2yz' + 2y'z$

$M_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(b) Chgt de bases

Prop $E$ $\mathbb{R}$-evdf $n \geq 1$, $q \in Q(E)$ et $f \in BS(E)$ associés

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de $E$

$A = M_{\mathcal{B}}(q)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(q)$, $P = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Alors $\boxed{A' = {}^tP A P}$

Démo $x, y \in E$ $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$

$Y = M_{\mathcal{B}}(y)$, $Y' = _{\mathcal{B}'}(y)$

Calcul analytique : $f(x,y) = {}^tX A Y = {}^tX' A' Y'$

or $X = PX' \Rightarrow f(x,y) = {}^t(PX') A PY' = {}^tX' ({}^tPAP) Y'$

unicité de $A'$ : $\left( M_1, M_2 \in S_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall X', Y', {}^tX' M_1 Y' = {}^tX' M_2 Y' \right.$

$(M_1)_{ij} = \sum_{k,h} (M_1)_{kh} x'_k y'_h$ $\left| \begin{array}{l} x'_k = \delta_{ki} \\ y'_h = \delta_{hj} \end{array} \right.$

$\left. \Rightarrow M_1 = M_2 \right)$

d'où ${}^tPAP = A'$

Prop $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ sont dits congruents s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$

tq $A' = {}^tPAP$

Rem 1 La relation de congruence sur $S_n(\mathbb{R})$ est 1 relation d'équivalence (R, S, T ...)

Rem 2 fondamentale : interprétation

$A$, $A'$ congruents représentent la m̂ forme quadratique dans 2 bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de $E$.

## C) Bases q-orthogonales

Df $E$ $\mathbb{R}$-evdf, $q \in Q(E)$ et $f \in BS(E)$ ass

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E$ est dite q-orthogonale

si $\forall i, j \in [1, n]$, $i \neq j \Rightarrow f(e_i, e_j) = 0$

équivalent à $M_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.

trad analytique : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $x = \sum x_i e_i$

$q(x) = \sum\sum_{i,j} f(e_i, e_j) x_i x_j = {}^tXAX$

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$ { "réduite en carré" / CL de carrés de formes linéaires

Remarques ▶ Technique 1 (HP) réduction de Gauss

base des calcul : • mise sous forme canonique

( ex $Q(X) = x^2 + xy - 2y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 - \frac{3}{4} y^2$

•• $ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$

( ex $Q(X) = 3xy = \frac{3}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$

▶ Technique 2 (normale)

Diagonaliser $A \in S_n(\mathbb{R})$ au moyen $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPP = I_n$ $(P^{-1} = {}^tP)$

${}^tPAP = P^{-1}AP = D = M_{\mathcal{B}'}(q)$ $\qquad P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

ex $E = \mathbb{R}^3$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad Q(X) = x^2 + 2xy - 2xz + 2yz - y^2 + z^2$

$\mathcal{B}$ base can : (ON pour PS can) $\quad A = M_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

vap de A $\quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \left((A-2I)X=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases}\right)$

$E_{-2}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad \left((A+2I)X=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=x \end{cases}\right)$

sinon ne représente rien vis à vis de la FQ

$P^{-1}AP = {}^tPAP$ nécessite ${}^tP = P^{-1}$ ie $P$ orthogonale

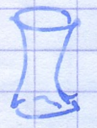
(matrice de passage d'1 BON de $\mathbb{R}^3$ à 1 BON)

vecteurs unitaires : $u = \frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $w = \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\rightarrow {}^tPP = I_3$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & 0 & -2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 \end{pmatrix} \qquad {}^tPAP = D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'}(D)$

$\mathcal{B}' = (u, v, w)$ base de $E$ et $Q$ orthogonale

**Rem** $\quad S$ surface de $\mathbb{R}^3$ d'éqn $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz = 1$

dans $\mathcal{B}'$ : $x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2 = 1$  H1

**Prop** $\quad E$ $\mathbb{R}$ev df, $q \in Q(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1 \,—\, e_n)$ base de $E$ $q$-orthogonale ie $M_{\mathcal{B}}(q)$ diagonale :

Alors (1) $q \geq 0 \iff \forall i \in [1, n]\ q(e_i) \geq 0$

(2) $q$ déf positive ssi $\forall i \in [1, n]\ q(e_i) > 0$

**Démo** (1) $\Rightarrow$ évident

$\Leftarrow$ cf exp analytique : $x = \sum x_i e_i$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{q(e_i)}_{a_{ii}} x_i^2 \geq 0$$

## ① Rang, forme non dégénérée

**NB** $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de $E$ $\quad A' = {}^tP A P$ (congruents, $P \in GL_n(\mathbb{R})$)

$\Rightarrow$ $A'$ et $A$ ont le même rang

**Rem** $\det A' = (\det P)^2 \det A$

$\rightarrow$ conservation du signe du déterminant

**Def** $E$ $\mathbb{R}$evdf, $q \in Q(E)$ et $f \in BS(E)$ ass

$rg\, f = rg\, q = rg\, M_{\mathcal{B}}(q)$ $\forall$ base $\mathcal{B}$ de $E$

Si $rg\, q = n = \dim E$, ODL $f$ ou $q$ est non dégénérée.

**Rem** (HP) $E$ $\mathbb{R}$evdf, à $f \in BS(E)$ on peut associer

$\varphi : \begin{vmatrix} E \longrightarrow E^* \\ y \longmapsto (x \mapsto f(x,y)) \end{vmatrix}$ $\quad$ soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
$\quad \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$

$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ ?

$\varphi(e_j) : x \mapsto f(x, e_j)$

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\varphi(e_j)(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x, e_j)$

$\Longrightarrow \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n f(e_i, e_j) e_i^*$

C'est la savonnette pour le débutant

$\Longrightarrow \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = M_{\mathcal{B}}(f)$

$\Longrightarrow rg\, f = rg\, \varphi$ $\quad$ (def intrinsèque ss base)

$\boxed{\text{Ex}}$ $E = \mathbb{R}^2$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad Q(X) = x^2 - y^2$ $\quad rg\, Q$ ?

$\mathcal{B}$ base can, $M_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $rg\, M_{\mathcal{B}}(Q) = 2$

$\longrightarrow Q$ non dégénérée, non positive

**Rem** $\mathcal{B}$ base de $E$ $q$-orthogonale

$q$ non dégénérée $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $q(e_i) \neq 0$

(e) Matrices positives, définies positives

$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^n$ & base can

à $A \in S_n(\mathbb{R})$ on peut ass $Q_A$ forme quad sur $E$ (dite can$^t$ ass à $A$)

Prop $Q_A : X \longmapsto {}^tXAX$ $\quad \left| \begin{array}{l} A \longmapsto Q_A \\ S_n(\mathbb{R}) \to Q(E) \end{array} \right.$ est bijective

$A \in S_n(\mathbb{R})$ dite positive si $Q_A$ l'est

définie positive si $Q_A$ l'est

On note $S_{n+}(\mathbb{R})$ (resp $S_{n++}(\mathbb{R})$) leur ensemble

## III) Produit scalaire

(a) $\boxed{\text{Th}}$ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $E$ $\mathbb{R}$ev, $q \in Q(E)$ et $f \in BS(E)$ ass.

• On suppose $q$ (ou $f$) positive. Alors :

$$\forall (x,y) \in E \qquad |f(x,y)| \leq \sqrt{q(x)\,q(y)}$$

•• Si de plus $f$ PS ($q$ définie positive) alors cette inégalité est une égalité ssi $(x,y)$ est liée.

Démo • $(x,y) \in E^2$, soit $P(\lambda) = q(\lambda x + y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda f(x,y) + q(y)$
$= a\lambda^2 + b\lambda + c$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geq 0$

Si $a > 0$ $\quad P(\lambda) = a\left(\lambda + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$

soit $\lambda_0 = -\frac{b}{a}$, $P(\lambda_0) = \frac{ac - b^2}{a} \geq 0 \Rightarrow ac \geq b^2$

$\Rightarrow \sqrt{ac} \geq |b|$ $\quad$ D

Si $a = 0$ $\quad P(\lambda) = 2b\lambda + c \geq 0 \Rightarrow b = 0$

sinon $P$ bij de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, cm

•• $f$ PS $\underline{\text{CS}}$ si $y = hx$ par ex : $|f(x,y)| = |h|\,q(x) = \sqrt{h^2 q(x) q(x)}$
$= \sqrt{q(x)\,q(hx)}$

CN 2 cas précédents : $a=0 \Rightarrow q(x)=0 \Rightarrow x=0$ donc $(x,y)$ liée
(⚠ $q$ déf $\geq 0$) $\quad a>0 \Rightarrow P(\lambda_0)=0 \Rightarrow q(\lambda_0 x+y)=0$
$\lambda_0 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0$
$\Rightarrow (x,y)$ liée

Traductions usuelles

① $E = \mathbb{R}^n$ ou $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ; ps can :
$x = (x_1, \_\_, x_n)$ ; $y = (y_1, \_\_, y_n)$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$
$\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle = {}^tX Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Cauchy-Schwarz $\quad \forall x_1, \_, x_n, y_1, \_, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}$$

② $E = M_n(\mathbb{R})$
ps can : $\forall A, B \in E$, $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = tr({}^tAB)$
On a $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$|tr\, {}^tAB| \leq \sqrt{tr\, {}^tAA \; tr\, {}^tBB}$$

③ $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
$\forall f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2}$$

Rem généralisation avec $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) / f^2$ intégrable sur $I \}$
$\langle f, g \rangle = \int_I fg$

$$\left|\int_I fg\right| \leq \sqrt{\int_I f^2 \times \int_I g^2}$$

(1) $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum u_k^2 \text{ converge} \right\}$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k \quad \text{ps}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2}$$

ex) $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \,/\, f(0) = 0$

Mq $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2$ ; préciser le cas d'égalité

$f(x) = \cancel{f(0)} + \displaystyle\int_0^x f' \quad x \in [0,1]$

$$f^2(x) = \left( \int_0^x f'(t)\,dt \right)^2$$

Or on a un ps sur $\mathcal{C}([0,a], \mathbb{R})$ : $\langle \varphi, \psi \rangle = \displaystyle\int_0^a \varphi \psi$

$$\left| \int_0^a \varphi \psi \right|^2 \leq \int_0^a \varphi^2 \times \int_0^a \psi^2 \Rightarrow \begin{cases} \varphi(t) = f'(t) \\ \psi(t) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^2(x) \leq \left( \int_0^x 1\,dt \right) \left( \int_0^x f'^2(t)\,dt \right) \quad (*) \quad x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f^2(x) \leq x \cdot \int_0^x f'^2(t)\,dt \leq x \cdot \underbrace{\int_0^1 f'^2(t)\,dt}_{C} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x) \leq \frac{1}{2} C \quad \square$$

<u>égalité</u> : $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2$, on reprend la démo

- on aura en particulier égalité ds $(*)$

ie $(f', 1)$ liée ie $f$ affine : $f(x) = ax + b$ or $f(0) = 0$

donc $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], f(x) = ax$

- égalité ds $(**)$ $\displaystyle\int_0^x f'^2 \leq \int_0^1 f'^2$ $f'$ constante

$\rightarrow$ faux pour $x < 1$ sauf si $f' = 0$ $(a = 0)$

$\rightarrow$ la seule fct du cas d'égalité est $\underline{\underline{f = 0}}$

2/ Existence de bases orthogonales ou orthonormales

Cas d'1 espace euclidien

Généralise au cas d'1 $\mathbb{R}$ev df muni d'1 forme quadratique.

ⓐ Bases $q$-orthogonales d'1 $\mathbb{R}$evdf

Prop $E$ $\mathbb{R}$evdf, $q \in Q(E)$ et $f \in BS(E)$ ass.
$\dim E = n \geq 1$

Alors il existe des bases de $E$ $q$-orthogonales

Démo par récurrence sur $n$

- $n = 1$, clair : toute base convient
- $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ $n \geq 2$ $q : E \to \mathbb{R}$ FQ

1er cas $q = 0$, $f = 0$ $\Rightarrow$ toute base de $E$ convient

2e cas $q \neq 0$ : $\exists e_1 \in E$, $q(e_1) \neq 0$

soit $\varphi : \begin{matrix} x \mapsto f(x, e_1) \\ E \to \mathbb{R} \end{matrix}$ $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ car $\varphi(e_1) \neq 0$

soit $H = \ker \varphi$ de dim $n-1$

$q_{/H}$ FQ sur $H$ de forme polaire $f_{/H^2}$

HR appliquée à $(H, q_{/H})$ : il existe 1 base $(e_2, \ldots, e_n)$ de $H$ $q_{/H}$ orthogonale ie $f(e_i, e_j) = 0$ si $\begin{cases} i \neq j \\ i, j \in [\![2, n]\!] \end{cases}$

enfin $E = \mathbb{R}e_1 \oplus H$ car $e_1 \notin H$ car $\varphi(e_1) \neq 0$

soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $E$ mq $q$-orthogonale

et $f(e_1, e_i) = 0$ si $2 \leq i \leq n$ car $e_i \in H$ □

$\boxed{\text{CSQ}}$ Csq matricielle $E$ $\mathbb{R}$evdf $\dim E = n \geq 1$ $q \in Q(E)$ $f$ ass

$\mathcal{B}$ base qcq, soit $A = M_{\mathcal{B}}(q) \in S_n(\mathbb{R})$.

$\exists$ base $B$ de $E$ $q$ orthogonale ie $M_B(q) = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Si $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \in GL_n(\mathbb{R})$

$A = {}^tPDP$ congruente à $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

NB on en déduit
- $\mathrm{rg}\, q = \mathrm{card}\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, \lambda_i \neq 0\}$
- $q \geq 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!]\ \lambda_i \geq 0$
- $q$ DP $\iff$ —— $\lambda_i > 0$

Cas 2 : cas les matrices positives, définies positives

$S_n(\mathbb{R})$ $\qquad E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad (\equiv \mathbb{R}^n)$

$A \in S_n(\mathbb{R})$, on note $Q_A$ la FQ can ass : $Q_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longmapsto {}^tXAX$

$$\begin{tikzcd}
S_n(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[ddr] & Q(E) \arrow[dd, bend left] \\
A \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & Q_A \arrow[d] \\
 & B_A \quad BS(E)
\end{tikzcd}$$

$\to$ isomorph

$B_A : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(X,Y) \longmapsto {}^tXAY$ FBS ass

① $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si $Q_A \geq 0$ ie $\forall X \in E,\ {}^tXAX \geq 0$

② $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si $Q_A$ définie positive ou $B_A$ PS

ie $\forall X \in E\ \ {}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$

$\iff \forall X \in E \setminus \{0\},\ {}^tXAX > 0$

## Premier Critère : Prop

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors

① $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tPP$

② $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = {}^tPP$

Démo NB si $A = {}^tPP$, ${}^tA = {}^t({}^tPP) = {}^tP\,{}^t({}^tP) = A \in S_n(\mathbb{R})$

① $\Leftarrow$ $X \in E$, ${}^tXAX = {}^tX\,{}^tP(PX) = {}^tYY$

où $Y = PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \Rightarrow {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ on reprend à base can de $E$ : $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Q_A)$

il existe $\mathcal{B}$ base de $E$ $Q_A$-orthogonale $\quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q_A) = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

avec $\lambda_i = Q_A(b_i) \geq 0$

Soit $R = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ $\qquad A = {}^tRDR$

Si on définit $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ ie $D = \Delta^2$

Soit $P = \Delta R$, on a $\underline{A = {}^tPP}$ $\square$

② <u>CS</u> $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ déjà fait
$X \in E \setminus \{0\}$ $\quad Q_A(X) = {}^tYY$ $\quad$ | $Y = PY \neq 0$ ($\exists i, y_i \neq 0$)
$= \sum_i y_i^2 > 0$ | $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $X \neq 0$

<u>CN</u> cf démo 1

$$A = {}^tRDR = {}^tPP$$

$Q_A(b_i) = \lambda_i > 0$ $\quad$ $\det D > 0 \Rightarrow \det P \neq 0$
car $P = \Delta R$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$ $\square$

$\boxed{ex}$ $A \in S_n(\mathbb{R})$ $\quad a_{ij} = \min(i, j)$ $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

${}^tTT = A$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

$A' = {}^tTT$ symétrique : $\underset{(i \leq j)}{A'_{i,j}} = \sum_{k=1}^n ({}^tT)_{ik} T_{kj} = \sum_{k=1}^n T_{ki} T_{kj}$

$T_{ki} = 0$ si $k > i$ $\quad$ . $\underline{A \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ; $Q_A(X) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = {}^t(TX)(TX) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j}^n x_i \right)^2$

ⓑ <u>Cas euclidien</u>

$E$ $\mathbb{R}$-evdf, $\dim E = n \geq 1$, muni d'1 PS $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$Q : x \longmapsto \langle x, x \rangle$ $(= \|x\|^2)$

**Th** Ds 1 espace euclidien (de dim $n \geq 1$) il existe des bases orthonormales

<u>Démo</u> ① On applique le th précédent :
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base $Q$-orthogonale
$Q$ DP car $Q(e_i) > 0$, $e'_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{Q(e_i)}}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ BON

<u>ie</u> $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ $\quad \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$ ie $M_{\mathcal{B}'}(Q) = I_n$

Méth 2 $\quad$ Procédé d'orthonormalisat° de Gram-Schmidt
On part de $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ base qcq de $E$
chercher 1 BON $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ tq $T = \mathrm{Pas}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$

tri sup et tq $T_{ii} > 0$ $i \in [1, n]$. Alors $\mathcal{C}$ unique.

**1^e vecteur** $c_1$ cherché tq $\mathrm{Vect}(c_1) = \mathbb{R} e_1$

$c_1 = \lambda e_1$ et $\langle c_1, c_1 \rangle = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle}}$

choix unique, $T_{11} > 0$

**j^e vecteur** ($c_1, \dots, c_{j-1}$ déjà construits)

$c_j$ CL de $e_1, \dots, e_j$ et $T_{jj} > 0$

$c_j = \lambda e_j + \sum_{i=1}^{j-1} x_i c_i$ $\qquad 0 = \lambda \langle e_j, c_i \rangle + \alpha_i$

$c_j = \lambda \left( e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle c_i, e_j \rangle c_i \right) = \lambda v_j$

$\lambda$ unique tq $T_{jj} > 0$ et $\langle c_j, c_j \rangle = 1$ si $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\langle v_j, v_j \rangle}}$

**D'où** (en notant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$) :

**Algorithme**

Pour $j := 1$ à $n$ faire

$c_j := e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle e_j, c_i \rangle c_i$

$c_j := \frac{c_j}{\|c_j\|}$

$\boxed{ex}$ $E = \mathbb{R}_2(X)$ $\qquad \langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

mq $\langle , \rangle$ ps, trouver 1 BON

* $\langle , \rangle$ * FBS ...

* DP $\quad \langle P, P \rangle = \sum_{k=-1}^{1} P(k)^2 \geq 0$

$\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P(-1) = P(0) = P(1) = 0$

$X(X^2-1) \mid P$
$d^\circ P \leq 2$ $\Big|$ $P = 0$ $\qquad \square$

* $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ base can

$1$ $\qquad \|1\|^2 = 3$ $\qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$X$ $\qquad \langle 1, X \rangle = 0$ $\qquad \|X^2\| = 2$ $\qquad c_2 = \frac{X}{\sqrt{2}}$

$X^2$ $\qquad \langle X^2, X \rangle = 0$, $\langle X^2, 1 \rangle = 2$ $\qquad c_3 = X^2 - \left( \langle X^2, c_1 \rangle c_1 + \cancel{\langle X^2, c_2 \rangle c_2} \right)$
$= X^2 - \frac{2}{3}$

$$\left\|X^2-\frac{2}{3}\right\|^2 = 2\times\frac{1}{9}+\frac{4}{9} = \frac{6}{9} \longrightarrow e_3 = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(X^2-\frac{2}{3}\right)$$

## ⓒ Usage des BON ds 1 espace euclidien

$E$ euclidien de dim $n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ PS

$\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ BON

• $x=\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ alors $x_i=\langle x, b_i\rangle$

•• $x, y\in E$ $x=\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, $y=\sum_{i=1}^{n} y_i b_i$ $X=M_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=M_{\mathcal{B}}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

Alors $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$

et $\langle x,x\rangle=\|x\|^2=\sum x_i^2={}^tXX$

$\boxed{\text{Th}}$ Chgt de BON

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de $E$, $\mathcal{B}$ BON, $P=\text{Pass}\ \mathcal{B}, \mathcal{B}'$

Alors $\mathcal{B}'$ BON de $E \iff {}^tPP=I_n$ (ie $P\in O(n)$)

Demo $b'_j=\sum_{i=1}^{n} p_{ij} b_i$

$$\langle b'_k, b'_h\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} p_{ik} b_i, \sum_{j=1}^{n} p_{jh} b_j\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} p_{ik}p_{jh}\underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}p_{ih}$$

$$= ({}^tPP)_{kh}$$

$\mathcal{B}'$ BON $\iff \forall k, h\ \langle b'_k, b'_h\rangle=\delta_{k,h}$

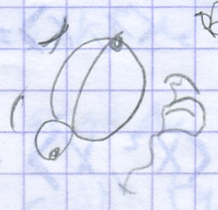
$\iff ({}^tPP)_{kh}=\delta_{k,h} \iff {}^tPP=I_n$

$\boxed{\text{ex}}$ $\mathbb{R}^3$, ps can, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base can ON

$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt2}(\vec{i}-\vec{j})$, $\vec{w}=\frac{1}{\sqrt6}(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ? on voit que ${}^tPP=I$

avec $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6\\ & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt6\\ & 0 & -2/\sqrt6\end{pmatrix}$



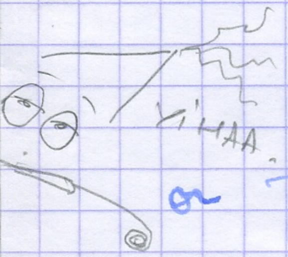
BURP (indigestion)

**Ex** Traduction matricielle de la méthode de Schmidt

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ ; $E = M_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ muni du ps can

$\mathcal{B}$ base can ON

$A = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ $\quad \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ vecteurs colonne de $A$




Soit $\mathcal{D}$ la base de Schmidt associée à $\mathcal{C}$

alors $\mathrm{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = T'$ tri sup, $T'_{ii} > 0$

or $\underbrace{\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}_{A} = \underbrace{\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{D})}_{U} \times \underbrace{\mathrm{Pass}(\mathcal{D}, \mathcal{C})}_{T = (T')^{-1}}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\ E \arrow[rr, "id_E"] \arrow[dr, "id_E"'] & & E\ \mathcal{B} \\
& E_{\mathcal{D}} \arrow[ur, "id_E"'] &
\end{tikzcd}$$

D'où factorisation $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$A = U \times T$ où $\begin{cases} {}^tUU = I_n \quad (U \in O(n)) \\ T \text{ tri sup avec } T_{ii} > 0 \end{cases}$

Rem $M = {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\quad M = {}^tTT$ (méth de Choleski)

$T$ unique

application à la résolution de $MX = Y \iff \begin{cases} {}^tTZ = Y \\ TX = Z \end{cases}$