

MP 08/09 – Corrigé du D.M. de PHYSIQUE-CHIMIE n°6**Exercice 1****1.a)**

$$\begin{aligned}\mu_{P_{(s)}(\text{blanc})}^{\circ} - \mu_{P_{(s)}(\text{rouge})}^{\circ} &= \left(\Delta_f H_{P_{(s)}(\text{blanc})}^{\circ} - \Delta_f H_{P_{(s)}(\text{rouge})}^{\circ} \right) - T \left(S_{P_{(s)}(\text{blanc})}^{\circ} - S_{P_{(s)}(\text{rouge})}^{\circ} \right) \\ &= (0 - (-17,56)) \cdot 10^3 - 298 \times (41,1 - 22,8) \\ &= \underline{12,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}\end{aligned}$$

b) La forme la plus stable est celle dont le potentiel chimique est le plus bas, c'est donc le phosphore rouge. Or le tableau attribue une enthalpie standard de formation nulle au phosphore blanc qui est donc le corps pur simple dans l'état standard de référence associé à l'élément P. Comme il s'agit normalement de la forme la plus stable, il y a ici une exception.

$$\mathbf{2.a)} \quad \Delta_r H^{\circ}(298) = \Delta_f H_{P_{4(g)}}^{\circ}(298) - 4 \times \Delta_f H_{P_{(s)}(\text{rouge})}^{\circ}(298) = 58,9 - 4 \times (-17,56) = \underline{129,14 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

$$\Delta_r S^{\circ}(298) = S_{P_{4(g)}}^{\circ}(298) - 4 \times S_{P_{(s)}(\text{rouge})}^{\circ}(298) = 279,9 - 4 \times (22,8) = \underline{188,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Dans l'approximation d'Ellingham : $\Delta_r H^{\circ}(T) \approx \Delta_r H^{\circ}(298)$ et $\Delta_r S^{\circ}(T) \approx \Delta_r S^{\circ}(298)$. Il vient donc :

$$\Delta_r G^{\circ}(T) \approx \Delta_r H^{\circ}(298) - T \Delta_r S^{\circ}(298) = \underline{129,14 - 0,1887 \times T \text{ (kJ} \cdot \text{mol}^{-1})}.$$

$$\mathbf{b)} \text{ A l'équilibre, la loi d'action de masse s'écrit : } \frac{a_{P_{4(g)}}}{(a_{P_{(s)}})^4} = K^{\circ}(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^{\circ}(T)}{RT}\right).$$

Or : $a_{P_{(s)}} = 1$ (solide pur), $a_{P_{4(g)}} = \frac{P_{P_{4(g)}}}{P^{\circ}}$ avec $P^{\circ} = 1 \text{ bar}$. Il vient donc :

$$P_{P_{4(g)}} = P^{\circ} \exp\left(\frac{-\Delta_r G^{\circ}(T)}{RT}\right) = \underline{\exp\left(22,70 - \frac{15533}{T}\right) \text{ (bar)}}$$

c) $P_{P_{4(g)}} = 1 \text{ bar}$ pour $T_{cb} = \frac{15532}{22,63} = \underline{684 \text{ K} = 411^{\circ}\text{C}}$. C'est la température d'ébullition du phosphore rouge sous 1 bar.

Exercice 2

$$\mathbf{1.a.} \quad \Delta_r G^{\circ}_1(400\text{K}) = -78,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow \underline{K_1(400\text{K}) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^{\circ}(400)}{R \times 400}\right) = 1,8 \cdot 10^{10}}.$$

1.b. Bilan de matière :

Quantités de matière	$\text{H}_2\text{O}_{(g)}$	$\text{CH}_{4(g)}$	$\text{H}_2\text{S}_{(g)}$	$\text{ZnO}_{(s)}$	$\text{ZnS}_{(s)}$	Total de gaz
Etat initial	70,6	25	4,4	n	0	100
Etat quelconque	$70,6 + \xi_1$	25	$4,4 - \xi_1$	$n - \xi_1$	ξ_1	100

A l'équilibre, $\Pi_1 = K_1$. Or : $\Pi_1 = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}/P^{\circ}}{P_{\text{H}_2\text{S}}/P^{\circ}} = \frac{70,6 + \xi_1}{4,4 - \xi_1}$. Donc : $\xi_1 = \frac{4,4K_1 - 70,6}{K_1 + 1} = 4,4 \text{ mol}$.

Remarque : On pouvait dire que la réaction est totale puisque $K_1 \gg 1$.

Dans l'état final la phase gazeuse est composée de : 75% de H_2O et 25% de CH_4 .

1.c. Appliquons la relation de Gibbs-Helmholtz :

$$\Delta_r H^{\circ}_1 = -T^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta_r G^{\circ}_1(T)}{T} \right) = -T^2 \frac{d}{dt} \left(-\frac{81300}{T} + 39,2 - 5,4 \ln T \right) = -81300 + 5,4T \text{ (J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Pour $T < \frac{81300}{5,4} = 15055 \text{ K}$ (plus que la température du Soleil qui est de 6000 K environ !), $\Delta_r H^\circ_1 < 0$

donc la réaction (1) est exothermique.

2.a. $\Delta_r H^\circ_2(298\text{K}) = \Delta_r H^\circ_{\text{CO(g)}}(298\text{K}) + 3\Delta_r H^\circ_{\text{H}_2(\text{g})}(298\text{K}) - \Delta_r H^\circ_{\text{CH}_4(\text{g})}(298\text{K}) - \Delta_r H^\circ_{\text{H}_2\text{O(g)}}(298\text{K})$
 $\text{H}_{2(\text{g})}$ est un **corps pur simple dans son état standard** (« CPSES ») donc $\Delta_r H^\circ_{\text{H}_2(\text{g})}(298\text{K}) = 0$.

$$\Delta_r H^\circ_2(298\text{K}) = -110,5 + 3 \times 0 - (-74,4) - (-241,8) = 205,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

D'après la loi de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r H^\circ_2(T)}{dT} = \Delta_r C_p = 29,1 + 3 \times 28,8 - 35,3 - 33,6 = 46,6 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

D'où : $\Delta_r H^\circ_2(T) = \Delta_r H^\circ_2(298) + \Delta_r C_p(T - 298) = 191,8 \cdot 10^3 + 46,6T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}$.

2.b.

$$\Delta_r S^\circ_2(298\text{K}) = S^\circ_{\text{CO(g)}}(298\text{K}) + 3S^\circ_{\text{H}_2(\text{g})}(298\text{K}) - S^\circ_{\text{CH}_4(\text{g})}(298\text{K}) - S^\circ_{\text{H}_2\text{O(g)}}(298\text{K})$$

$$= 197,7 + 3 \times 130,7 - 186,3 - 188,8 = 214,7 \text{ J.K.mol}^{-1}$$

D'après la loi de Kirchhoff : $\frac{d\Delta_r S^\circ_2(T)}{dT} = \frac{\Delta_r C_p}{T}$. D'où :

$$\Delta_r S^\circ(T) = \Delta_r S^\circ(298\text{K}) + \Delta_r C_p \ln \frac{T}{298\text{K}} = -50,8 + 46,6 \ln T \text{ (J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}\text{)}$$

2.c. $\Delta_r G^\circ_2(T) = \Delta_r H^\circ_2(T) - T\Delta_r S^\circ_2(T) = 191,8 \cdot 10^3 + 97,4T - 46,6T \ln T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}$

$$\ln K_2(T) = -\frac{\Delta_r G^\circ_2(T)}{RT} = -11,7 - \frac{23070}{T} + 5,5 \ln T$$

En particulier : $K_2(1273\text{K}) = 13,3 \cdot 10^3$.

3.a.

	$\text{CH}_{4(\text{g})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$	$\text{CO}_{(\text{g})}$	$\text{H}_{2(\text{g})}$	$\text{CO}_{2(\text{g})}$	Total gaz
Etat initial	1	3	0	0	0	4
Etat quelconque	$1 - \xi_2$	$3 - \xi_2 - \xi_3$	$\xi_2 - \xi_3$	$3\xi_2 + \xi_3$	ξ_3	$4 + 2\xi_2$
Avec $\xi_1 \approx 1 \text{ mol}$	~ 0	$2 - \xi_3$	$1 - \xi_3$	$3 + \xi_3$	ξ_3	6

3.b. La constante d'équilibre de la réaction (3) étant très grande on peut supposer qu'elle est totale ; dans ce cas ξ_2 a sa valeur maximale qui est $\xi_2 \approx 1 \text{ mol}$.

Avec cette approximation on a les quantités de matières de la troisième ligne du tableau. La loi de Guldberg et Waage pour l'équilibre (3) s'écrit :

$$K_3 = \frac{P_{\text{CO}_2} P_{\text{H}_2}}{P_{\text{CO}} P_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{x_{\text{CO}_2} x_{\text{H}_2}}{x_{\text{CO}} x_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\xi_3(3 + \xi_3)}{(1 - \xi_3)(2 - \xi_3)} \Rightarrow (1 - K)\xi_3^2 - 3(1 + K)\xi_3 - 2K = 0$$

L'équation du second degré admet une seule racine comprise entre 0 et 1 : $\xi_3 = 0,189 \text{ mol}$.

3.c. Il vient alors avec la loi de Dalton :

$$P_{\text{H}_2\text{O}} \approx \frac{2 - 0,189}{6} P = 1,51 \text{ bar} ; P_{\text{CO}} \approx \frac{1 - 0,189}{6} P = 0,68 \text{ bar} , P_{\text{H}_2} \approx \frac{3 + 0,189}{6} P = 2,66 \text{ bar} ;$$

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{0,189}{6} P = 0,16 \text{ bar}$$

En utilisant la loi de Guldberg et Waage pour l'équilibre (2) :

$$K_2 = \frac{P_{\text{CO}} (P_{\text{H}_2})^3}{P_{\text{CH}_4} P_{\text{H}_2\text{O}} P^{\circ 2}} \Rightarrow P_{\text{CH}_4} = \frac{P_{\text{CO}} (P_{\text{H}_2})^3}{P_{\text{H}_2\text{O}} P^{\circ 2} K_2} \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ bar}$$

Elle est très faible, l'approximation $\xi_2 \approx 1\text{mol}$ était justifiée.

3.d. La réaction (3) produit du dihydrogène en plus et déplace la réaction (2) vers la droite en consommant le monoxyde de carbone CO que celle-ci produit.

$$4.a. \mathcal{A}_4 = -\Delta_r G^\circ_4 - RT \ln Q_4 = -\Delta_r G^\circ_4 - RT \ln \left(\frac{P_{\text{CO}_2} P^\circ}{(P_{\text{CO}})^2} \right)$$

$$\mathcal{A}_5 = -\Delta_r G^\circ_5 - RT \ln Q_5 = -\Delta_r G^\circ_5 - RT \ln \left(\frac{(P_{\text{H}_2})^2}{P_{\text{CH}_4} P^\circ} \right)$$

4.b. Avec les valeurs trouvées à la question 3 :

- $\mathcal{A}_4 = -51,2 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$ donc le carbone d'apparaît pas par la réaction (4).
- $\mathcal{A}_5 = -58,5 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$ donc le carbone n'apparaît pas non plus par la réaction (5)

4.c. Le dépôt de carbone sur le catalyseur rendrait celui-ci inactif.

Exercice 3

1.

- D'après la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0(298) &= \Delta_f H_{\text{CaO}}^0(298) + \Delta_f H_{\text{SO}_2}^0(298) + \frac{1}{2} \underbrace{\Delta_f H_{\text{O}_2}^0(298)}_{=0 \text{ car corps pur simple dans son état standard}} - \Delta_f H_{\text{CaSO}_4}^0(298) \\ &= -634,5 - 296,4 + 0 - (-1431,2) = \underline{500,3 \text{ kJ.mol}^{-1}} \end{aligned}$$

- Par définition de l'entropie standard de réaction :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_1^0(298) &= S_{\text{CaO}}^0(298) + S_{\text{SO}_2}^0(298) + \frac{1}{2} S_{\text{O}_2}^0(298) - S_{\text{CaSO}_4}^0(298) \\ &= 39,7 + 247,9 + \frac{1}{2} 204,8 - 106,6 = \underline{283,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}} \end{aligned}$$

Nous faisons l'approximation d'Ellingham : $\Delta_r H_1^0(T) \approx \Delta_r H_1^0(298)$ et $\Delta_r S_1^0(T) \approx \Delta_r S_1^0(298)$. Il vient :

$$\Delta_r G_1^0(T) \approx \Delta_r H_1^0(298) - T \Delta_r S_1^0(298) = 500,3 \cdot 10^3 - 283,4 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}.$$

$$2.a. \Delta_r S_{\text{SO}_3}^0(298) = \frac{\Delta_f H_{\text{SO}_3}^0(298) - \Delta_f G_{\text{SO}_3}^0(298)}{298} = \frac{-395,4 - (-370,8)}{298} \cdot 10^3 = -82,6 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

De plus, la réaction de formation de $\text{SO}_{3(\text{g})}$ est : $\text{S}_{(\text{s})} + \frac{3}{2} \text{O}_{2(\text{g})} \rightleftharpoons \text{SO}_{3(\text{g})}$ donc :

$$\Delta_f S_{\text{SO}_3}^0(298) = S_{\text{SO}_3}^0(298) - S_{\text{S}}^0(298) - \frac{3}{2} S_{\text{O}_2}^0(298)$$

$$\text{et } S_{\text{SO}_3}^0(298) = \Delta_f S_{\text{SO}_3}^0(298) + S_{\text{S}}^0(298) + \frac{3}{2} S_{\text{O}_2}^0(298) = -82,6 + 31,8 + \frac{3}{2} 204,8 = 256,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

2.b. 1ère méthode :

$$\Delta_r H_2^0(298) = \Delta_f H_{\text{SO}_3}^0(298) - \frac{1}{2} \underbrace{\Delta_f H_{\text{O}_2}^0(298)}_{=0 \text{ car corps pur simple dans son état standard}} - \Delta_f H_{\text{SO}_2}^0(298) = -395,4 - 0 - (-296,4) = -99,0 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$\Delta_r S_2^0(298) = S_{\text{SO}_3}^0(298) - \frac{1}{2} S_{\text{O}_2}^0(298) - S_{\text{SO}_2}^0(298) = 256,4 - \frac{1}{2} 204,8 - 247,9 = -93,9 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

Avec l'approximation d'Ellingham :

$$\Delta_r G_2^0(T) \approx \Delta_r H_2^0(298) - T \Delta_r S_2^0(298) = -99,0 \cdot 10^3 + 93,9 T \text{ J.mol}^{-1}$$

2^{ème} méthode :

On calcule par la loi de Hess :

$$\Delta_r G_2^0(298) = \Delta_f G_{\text{SO}_3}^0(298) - \frac{1}{2} \underbrace{\Delta_f G_{\text{O}_2}^0(298)}_{=0 \text{ car corps pur simple dans son état standard}} - \Delta_f G_{\text{SO}_2}^0(298) = -370,8 - 0 - (-299,7) = -71,1 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

ainsi que $\Delta_r H_2^0(298)$ comme dans la première méthode.

On applique ensuite la relation de Gibbs-Helmholtz : $\frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G_2^0(T)}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H_2^0(T)}{T^2} \approx -\frac{\Delta_r H_2^0(298)}{T^2}$, en

faisant l'approximation d'Ellingham. Il vient en intégrant :

$$\frac{\Delta_r G_2^0(T)}{T} - \frac{\Delta_r G_2^0(298)}{298} = \Delta_r H_2^0(298) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{298} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta_r G_2^0(T) = \Delta_r H_2^0(298) - \left(\frac{\Delta_r H_2^0(298) - \Delta_r G_2^0(298)}{298} \right) T = -99,0 \cdot 10^3 - \frac{-99,0 - (-71,1)}{298} 10^3 T$$

ce qui redonne bien le même résultat.

3.a.

- Le tableau bilan de matière est le suivant (on part de sulfate de calcium seul) :

	CaSO _{4(s)}	CaO _(s)	SO _{2(g)}	O _{2(g)}	Total gaz
État initial	n ₀	0	0	0	0
État quelconque	n ₀ - ξ	ξ	ξ	$\frac{1}{2}\xi$	$\frac{3}{2}\xi$

On trouve, en appliquant la loi de Dalton : $P_{\text{SO}_2} = \frac{n_{\text{SO}_2}}{n_T} P = \frac{2}{3} P$ et $P_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2}}{n_T} P = \frac{1}{3} P$.

- L'affinité chimique de la réaction (1) est :

$$\mathcal{A}_1 = -\Delta_r G_1^0 - RT \ln Q_1$$

avec

$$Q_1 = \frac{a_{\text{CaO(s)}} a_{\text{SO}_2(\text{g})} (a_{\text{O}_2(\text{g})})^{1/2}}{a_{\text{CaSO}_4(\text{s})}} = \frac{1 \times (P_{\text{SO}_2}/P^\circ) \times (P_{\text{O}_2}/P^\circ)^{1/2}}{1} = \frac{P_{\text{SO}_2} (P_{\text{O}_2})^{1/2}}{P^{\circ 3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{P}{P^\circ} \right)^{3/2}$$

Finalement : $\mathcal{A}_1 = -500,3 \cdot 10^3 + T \left[\underbrace{283,4 - 8,314 \ln \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)}_{=291,3} - 8,314 \times \frac{3}{2} \ln \left(\frac{P}{P^\circ} \right) \right] \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}.$

- A l'équilibre chimique $\mathcal{A}_1 = 0$ donc $T_1 = \frac{500,3 \cdot 10^3}{291,3} = 1717 \text{ K}$.
- Pour $T > T_1$, $\mathcal{A}_1 > 0$ donc **il y a rupture d'équilibre par disparition de CaSO_{4(s)}**.
Pour $T < T_1$, $\mathcal{A}_1 < 0$ donc **il y a rupture d'équilibre par disparition de CaO_(s)**.
Autrement dit : CaSO_{4(s)} est stable pour $T < T_1$.

3.b.

- Par définition de la constante d'équilibre : $K_2^0(T_1) = \exp \left(-\frac{\Delta_r G_2^0(T_1)}{RT_1} \right)$.

Or $\Delta_r G_2^0(T_1) = -99,0 \cdot 10^3 + 93,9 \times 1717 = 62,2 \cdot 10^3 \text{ J.mol}^{-1}$. Donc :

$$K_2^0(T_1) = \exp \left(-\frac{62,2 \cdot 10^3}{8,314 \times 1717} \right) = 1,6 \cdot 10^{-2}$$

- $K_2^0(T_1) \ll 1$, on peut donc considérer que l'avancement de la réaction est faible et qu'il y a peu de $\text{SO}_{3(g)}$. Dans ce cas : $P_{\text{SO}_2} \approx \frac{2}{3}P$ et $P_{\text{O}_2} \approx \frac{1}{3}P$, expressions trouvées à la question précédente.

D'autre part, la loi de Guldberg et Waage (loi d'action des masses) s'écrit pour l'équilibre (2)

s'écrit : $Q_2 = \frac{P_{\text{SO}_3}(P^\circ)^{1/2}}{P_{\text{SO}_2}(P_{\text{O}_2})^{1/2}} = K_2^0(T_1)$. On en déduit que :

$$P_{\text{SO}_3} = K_2^0(T_1) \frac{P_{\text{SO}_2}(P_{\text{O}_2})^{1/2}}{(P^\circ)^{1/2}} \approx K_2^0(T_1) \frac{\frac{2}{3\sqrt{3}}(P)^{3/2}}{(P^\circ)^{1/2}}$$

- Pour $P = 1 \text{ bar}$, il vient $P_{\text{SO}_3} = 0,062 \ll 1 \text{ bar}$. L'approximation précédente était bien justifiée.

Problème 1

1) a) $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \frac{2a}{\cos \theta} \vec{u}_r \wedge (\lambda F_0 \sin \theta \vec{u}_r + F_0 \cos \theta \vec{u}_\theta) = 2aF_0 \vec{u}_z$.

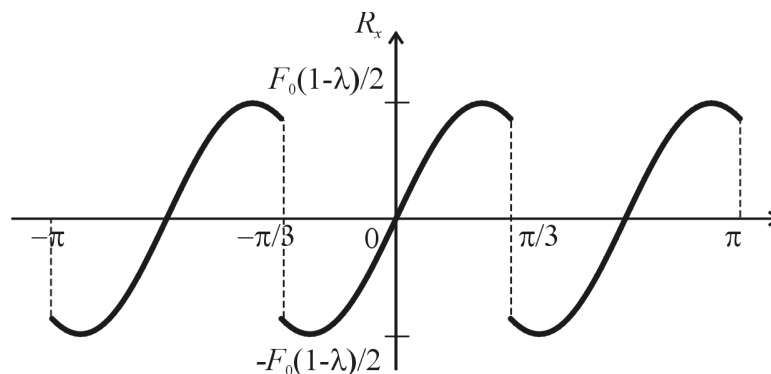
b) Pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\vec{M}_O(\vec{F})$ ne dépend pas de θ ; pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ et $\theta \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ une autre pale reçoit le jet mais le moment de la force aérodynamique est le même.

2) a) Oz est axe de symétrie d'ordre 3 pour (S) et Oxy est plan de symétrie pour (S), le centre d'inertie de (S) appartient donc à la fois à Oz et Oxy , c'est le point O .

b) TRC pour (S) :

$$M\vec{a}_O = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}, \text{ avec } \vec{a}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -M\vec{g} - \vec{F} = Mg\vec{u}_z - \lambda F_0 \sin \theta \vec{u}_r - F_0 \cos \theta \vec{u}_\theta$$

c) Pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $R_x = F_0(1-\lambda)\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}F_0(1-\lambda)\sin 2\theta$; par symétrie R_x est une fonction de période $\frac{2\pi}{3}$.



3) TMC par rapport à l'axe Oz appliqué à (S) : $J\ddot{\theta} = 2aF_0 - \alpha\dot{\theta}$.

Solution vérifiant $\dot{\theta}(0) = 0$: $\dot{\theta}(t) = \frac{2aF_0}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{J}\right) \right)$.

La vitesse de rotation atteint la valeur limite $\Omega = \frac{2aF_0}{\alpha}$ en un temps caractéristique $\tau = \frac{J}{\alpha}$.

4) a) TMC par rapport à l'axe Oz appliqué à (S) : $J\ddot{\theta} = 2aF_0 - \alpha\dot{\theta} - f \frac{a}{2} \lambda F_0 |\sin \theta|$.

b) Mise en mouvement si $\ddot{\theta}(0) > 0 \Leftrightarrow f < \frac{4\lambda}{|\sin \theta_0|}$.

Pour $\theta_0 = 0$, la condition est vérifiée quelque soit f ; elle est d'autant plus contraignante que $|\theta_0|$ est grand; elle est vérifiée quel que soit $\theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ si $f < 8\lambda$.

5) a) $J\ddot{\theta} = 2aF_0 \Rightarrow J\dot{\theta} = 2aF_0\theta \Rightarrow$ (intégration par rapport au temps) $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = 2aF_0\theta + \text{constante}$.

La variation de $\dot{\theta}^2$ lorsque θ varie de 2π est donc : $(\Delta\dot{\theta}^2)_{1 \text{ tour}} = \frac{4aF_0}{J} \times 2\pi = \frac{8\pi aF_0}{J}$.

b) $J\ddot{\theta} = 2aF_0 - f\frac{a}{2}\lambda F_0 |\sin\theta|$; attention cette équation n'est valable que pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, de plus la

valeur absolue oblige à séparer les cas $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$: la multiplication par $\dot{\theta}$ intégration par rapport au temps conduit à :

$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = 2aF_0\theta + f\frac{a}{2}\lambda F_0 \cos\theta + \text{constante}$; il vient pour θ variant de 0 à $\frac{\pi}{3}$:

$$(\Delta\dot{\theta}^2)_{0 \rightarrow \frac{\pi}{3}} = \frac{4aF_0}{J} \times \frac{\pi}{3} + \frac{f\lambda aF_0}{J} \times \left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = \frac{4\pi aF_0}{3J} - \frac{f\lambda aF_0}{2J}$$

Pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$: $|\sin\theta| = -\sin\theta$, il vient de même $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = 2aF_0\theta - f\frac{a}{2}\lambda F_0 \cos\theta + \text{constante}$ et :

$$(\Delta\dot{\theta}^2)_{\frac{\pi}{3} \rightarrow 0} = \frac{4aF_0}{J} \times \frac{\pi}{3} - \frac{f\lambda aF_0}{J} \times \left(\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{4\pi aF_0}{3J} - \frac{f\lambda aF_0}{2J} = (\Delta\dot{\theta}^2)_{0 \rightarrow \frac{\pi}{3}}$$

Par symétrie du dispositif :

$$(\Delta\dot{\theta}^2)_{1 \text{ tour}} = 6 \times (\Delta\dot{\theta}^2)_{0 \rightarrow \frac{\pi}{3}} = \frac{8\pi aF_0}{J} - \frac{3f\lambda aF_0}{J}$$

Problème 2

A.1) a) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}}_{\text{vecteurs constants}}$ d'où par dérivation : $\overrightarrow{v_H} = \overrightarrow{v_C} = v\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{a_H} = \overrightarrow{a_C} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_x}$.

b) Par associativité du barycentre : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+M} (m\overrightarrow{OC} + M\overrightarrow{OH})$; d'où par dérivation :

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{1}{m+M} (m\overrightarrow{v_C} + M\overrightarrow{v_H}) = \overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_H} = v\overrightarrow{u_x} \text{ et } \overrightarrow{a_G} = \frac{1}{m+M} (m\overrightarrow{a_C} + M\overrightarrow{a_H}) = \overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_H} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_x}$$

A.2) $\overrightarrow{v_{I \in \text{ballon}}} = \overrightarrow{v_{I \in \text{sol}}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{\omega}_{\text{ballon}} \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Leftrightarrow v = R\omega$.

A.3) $\overrightarrow{v_{A \in \text{clown}}} = \overrightarrow{v_H} = v\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v_{A \in \text{ballon}}} = \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{\omega}_{\text{ballon}} \wedge \overrightarrow{CA} = v\overrightarrow{u_x} + R\omega(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} - \sin\alpha\overrightarrow{u_z})$, donc :

$$\overrightarrow{V} = -R\omega(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} - \sin\alpha\overrightarrow{u_z}) = v(-\cos\alpha\overrightarrow{u_x} + \sin\alpha\overrightarrow{u_z}).$$

A.4) a) Théorème de Koenig : $\overrightarrow{L}_{C, \text{ballon}} = \overrightarrow{L}_{\text{ballon}}^* = J_{C_y} \overrightarrow{\omega}_{y}$ car, dans son référentiel barycentrique, le ballon est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Cy , axe de symétrie; finalement :

$$\overrightarrow{L}_{C, \text{ballon}} = \frac{2}{3}mR^2\overrightarrow{\omega}_{y} = \frac{2}{3}mRv\overrightarrow{u_y}.$$

$$b) \vec{L}_{I,\text{ballon}} = \vec{L}_{C,\text{ballon}} + m\vec{v}_C \wedge \vec{CI} = \frac{2}{3}mR^2\omega\vec{u}_y + m\vec{v}_x \wedge (-R\vec{u}_z) = \frac{5}{3}mRv\vec{u}_y.$$

A.5) a) Le clown étant assimilé à un solide en translation : $\vec{L}_{H,\text{clown}} = \vec{L}_{\text{clown}}^* = \vec{0}$. Il vient ensuite :

$$\vec{L}_{I,\text{clown}} = \vec{L}_{H,\text{clown}} + M\vec{v}_H \wedge \vec{HI} = Mv\vec{u}_x \wedge (-R\sin\alpha\vec{u}_x - R(3+\cos\alpha)\vec{u}_z) = MRv(3+\cos\alpha)\vec{u}_y.$$

$$b) \text{Finalement : } \vec{L}_{I,S} = \vec{L}_{I,\text{ballon}} + \vec{L}_{I,\text{clown}} = \left(\frac{5}{3}m + M(3+\cos\alpha) \right) Rv\vec{u}_y.$$

B.1) Les actions mécaniques **extérieures** agissant sur \mathcal{S} sont :

- le poids $(m+M)\vec{g}$ appliqué en H ,
- l'action de contact du sol $\vec{R} = R_x\vec{u}_x + R_y\vec{u}_y$ appliquée en I .

N.B. : Il existe bien entendu une action entre le clown et le ballon, mais c'est une action **intérieure** au système \mathcal{S} .

B.2) a) Théorème de Koenig : $\vec{L}_{I,S} = \vec{L}_S^* + \vec{IG} \wedge (M+m)\vec{v}_G$.

Si nous dérivons cette relation par rapport au temps il vient, en utilisant le fait que $\vec{v}_I = \vec{v}_C = \vec{v}_G$ (I est le point géométrique du contact situé constamment à la verticale de C), le théorème du moment cinétique en G et le théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_{I,S}}{dt} = \frac{d\vec{L}_S^*}{dt} + \underbrace{(\vec{v}_G - \vec{v}_I)}_{=\vec{0}} \wedge (M+m)\vec{v}_G + \vec{IG} \wedge (M+m)\vec{a}_G = \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} + \vec{IG} \wedge \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}$$

Le dernier membre est égal au moment pris en I des actions extérieures sur \mathcal{S} , d'après la formule de changement de point ; finalement : $\frac{d\vec{L}_{I,S}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{I,\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}$.

Cette relation n'était nullement évidente puisque I n'est pas un point fixe dans \mathcal{R} .

$$b) \vec{\mathcal{M}}_{I,\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} = \vec{IG} \wedge (m+M)\vec{g} + \underbrace{\vec{II}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{R} = \underbrace{\vec{IC}}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{g} + \vec{IH} \wedge M\vec{g} = MgR\sin\alpha\vec{u}_y ;$$

$$\frac{d\vec{L}_{I,S}}{dt} = \left(\frac{5}{3}m + M(3+\cos\alpha) \right) R \frac{dv}{dt} \vec{u}_y ; \text{ il vient donc : } \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{Mg\sin\alpha}{\frac{3}{5}m + M(3+\cos\alpha)}}.$$

$$c) a = 0,205 \text{ m.s}^{-2}.$$

B.3) a) Nous trouvons, en appliquant le théorème de la résultante cinétique au système \mathcal{S} :

$$\vec{R} = (m+M)\vec{a}_H - (m+M)\vec{g} = (m+M)(a\vec{u}_x + g\vec{u}_z)$$

$$\text{soit } R_x = (m+M)a = 13,53 \text{ N et } R_z = (m+M)g = 646,8 \text{ N}$$

b) D'après la loi de Coulomb, le glissement n'apparaît pas si $|R_x| \leq f|R_z|$ or : $\frac{|R_x|}{|R_z|} = 0,02 < f = 0,2$.

B.4) Nous obtenons en intégrant par rapport au temps : $v(t) = at + \underbrace{v(0)}_{=0}$ (puisque le système est immobile à l'instant initial). De plus $\|\vec{v}\| = v(t)$; $\|\vec{v}\| \leq V_{\text{max}}$ s'écrit : $t \leq T = \frac{V_{\text{max}}}{a} = 9,8 \text{ s}$.

Nous obtenons en intégrant encore une fois : $x_C(t) = \frac{1}{2}at^2 + x_C(0)$. La distance parcourue par le

ballon à l'instant T est : $L = \frac{1}{2}aT^2 = \frac{V_{\text{max}}^2}{2a} = 9,8 \text{ m}$.

C.1) Cette formule redonne bien le résultat de B.2.b) dans le cas où $\beta = 0$; à la différence de la question B.2.b) le poids du ballon apparaît ici dans l'expression de l'accélération car son moment en I n'est plus nul.

C.2) a) Le clown est en équilibre si $\frac{dv}{dt} = 0$ ce qui est le cas lorsque :

$$\sin(\alpha + \beta) = -\left(1 + \frac{m}{M}\right) \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = -\beta - \arcsin\left(\left(1 + \frac{m}{M}\right) \sin \beta\right) = \alpha_{\text{eq}}$$

b) Dans ce cas, d'après le théorème de la résultante cinétique on a :

$$\vec{R} = -(m + M)\vec{g} = -(m + M)g \sin \beta \vec{u}_x + (m + M)g \cos \beta \vec{u}_z.$$

Le glissement ne s'amorce pas si : $\frac{|R_x|}{|R_z|} \leq f \Leftrightarrow \tan \beta < f \Leftrightarrow \beta \leq \arctan f = 0,20 \text{ rad} = 11,3^\circ$

c) $\alpha_{\text{eq}} = -0,183 \text{ rad} = -10,5^\circ$.

C.3) a) $a = 0,635 \text{ m.s}^{-2}$; $L = \frac{V_{\text{max}}^2}{2a} = 3,15 \text{ m}$.

b) Il n'est pas étonnant que l'accélération soit plus forte en descendant le plan incliné que sur un plan horizontal.

C.4) a) $\frac{dv}{dt} < 0 \Leftrightarrow \alpha < \alpha_{\text{eq}}$. Pour $\beta = 5^\circ$, la valeur $\alpha = -15^\circ$ convient et $a = \frac{dv}{dt} = -0,185 \text{ m.s}^{-2}$.

b) D'après le théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{R} = (m + M)\vec{a}_H - (m + M)\vec{g} = (m + M)\left((a - g \sin \beta)\vec{u}_x + g \cos \beta \vec{u}_z\right)$$

Ainsi, la composante tangentielle de la force de contact est $R_x = (m + M)(a - g \sin \beta) = -68,6 \text{ N}$ et la composante normale : $R_z = (m + M)g \cos \beta = 644 \text{ N}$.

$\frac{|R_x|}{|R_z|} = 0,10 < f = 0,2$ donc le glissement ne peut pas s'amorcer.

c) La longueur maximale parcourue par le ballon est $L = \frac{V_{\text{max}}^2}{2a} = 10,8 \text{ m}$; le centre du ballon s'élève au maximum de $H = L \sin \beta = 0,94 \text{ m}$.