ALGEBRE
Chapitre 2

Généralité d'algèbre linéaire

I) Revoir le cours de MPSI

II) Compléments

Algèbre linéaire

- Notion d'ev sur 1 corps $\mathbb{K}$ (commutatif)
  - $\mathbb{K}$ (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par défaut)
  - E avec lci $+$, lce $\cdot$

  $(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ev
- Sous espace vectoriel

  $E' \subset E$

1) Combinaison linéaire

E $\mathbb{K}$ev

$B = (e_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de E $\quad \begin{matrix} i \mapsto e_i \\ I \to E \end{matrix}$

si I fini, $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$. $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ a un sens

Def $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ supposé à support fini $J = \{ i \in I / \lambda_i \neq 0 \}$

$(e_i)_{i \in I} \in E^I$ où E $\mathbb{K}$ev

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$$

Def E $\mathbb{K}$ev, $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I} \in E^I$

ODQ x est CL des vecteurs de $\mathcal{B}$, s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ à support fini tq $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

Prop Soit A une partie de E

On note $\mathrm{Vect}(A)$ le sev de E engendré par A. C'est aussi :

- le plus petit sev de E contenant A, ⟺ l'intersection de ts les sev de E contenant A, ⟺ l'ensemble des CL des vecteurs de A

Vérif : $B = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ F \supset A}} F$ sev de E comme intersect° de sev contenant A

plus petit : si F sev de E contenant A, $F \supset B$

$C = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \,/\, (a_i) \in A^I, (\lambda_i)_{i \in I} \in K^I \text{ à support fini} \right\}$ (I qcq)

C sev de E contenant A par construction, stable par CL ($a \in A$, $1.a$)

plus petit : F sev de E contenant A doit contenir de telles CL

ex : Cas typique $E = K[X]$ $\quad B = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$

$X^2 + 1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k X^k \quad \alpha_0 = 1 = \alpha_2 \quad \alpha_k = 0$ sinon

Def : E Kev, $B = (e_i)_{i \in I}$ famille de vecteurs de E. On dit :

- B libre si toute sous famille finie $(e_i)_{i \in J}$ (avec $J \subset I$, J fini) est libre

ie $\forall (\alpha_i)_{i \in J} \in K^J$, $\sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in J, \alpha_i = 0$

- B génératrice si $\mathrm{vect}(B) = E$

ie $\forall x \in E, \exists (\alpha_i)_{i \in I} \in K^I$ à support fini tq $x = \sum_I \alpha_i e_i$

- B base si B libre & génératrice ds E

ie $\forall x \in E, \exists (\alpha_i)_{i \in I} \in K^I$ à support fini, unique, $x = \sum_I \alpha_i e_i$

($(\alpha_i)_{i \in I}$ coord de x ds la base B notée $\mathrm{Coord}_B(x)$)

Def : Soit $B = (e_i)_{i \in I}$ base du Kev E. $\forall x \in E$, l'unique famille $(\alpha_i)_{i \in I} \in K^I$, à support fini, tq $\sum \alpha_i e_i = x$ s'appelle coordonnées / composantes de x dans B.

Rem : ▷ $x, y \in E$, $\lambda \in K$, B base de E

$\mathrm{Coord}_B(x + \lambda y) = \mathrm{Coord}_B(x) + \lambda \,\mathrm{Coord}_B(y)$

▷ rappels sur les EVDF

Th : E Kevdf si $\exists B$ finie tq $E = \mathrm{vect}\, B$. Dans ce cas, il existe $\exists! n \in \mathbb{N}$ tq toutes les bases de E ont le même cardinal n. $n = \dim E$

si $\mathcal{L} \in E^p$ libre alors $p \leq n$, $\mathcal{L}$ base ssi $p = n$

si $\mathcal{G} \in E^p$ génératrice alors $p \geq n$

Th 2 (th de la base incomplète) si E Kev df

- $\mathcal{G}$ famille génératrice, $\mathcal{L}$ famille libre de E sous famille de $\mathcal{G}$, $\exists \mathcal{B}$ base de E tq $\mathcal{L}$ sous famille de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ sous famille de $\mathcal{G}$

•• si $\mathcal{L}$ libre elle peut être complétée en une base de E

résultats généralisables

Th Tout Kev admet des bases

TBI Si E Kev, $\mathcal{L}$ libre et $\mathcal{G}$ génératrice tq $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ Alors peut être complétée en $\mathcal{B}$ base de E, toute sous famille de $\mathcal{G}$.

Ex $\mathbb{K}[X]$ base canonique $\mathcal{B} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ → support fini

$\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists! (a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \underbrace{(\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N, a_k = 0)}_{k \in \mathbb{N}}$

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \qquad a_k \text{ coeff de } P$$

si $P \neq 0$ $\quad deg(P) = d°(P) = \max\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\} = p$

$val(P) = v(P) = \min\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\} = q$

$$\Rightarrow P(X) = \sum_{k=q}^{p} a_k X^k$$

Prop 1) Toute famille de PN de $\mathbb{K}[X]$ non nuls, de degrés deux-à-deux distincts est libre

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = (P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ de PN tq $\forall k, d°P_k = k$ Alors $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{K}_n[X]$

3) Soit $\mathcal{B} = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où $P_k \in \mathbb{K}[X]$ est de degré k, $\forall k \in \mathbb{N}$ Alors $\mathcal{B}$ base de E

Démo 1) limitation aux familles finies soit $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ finie

$\forall k, h \in \mathbb{N}$, $k \neq h \Rightarrow d°P_k \neq d°P_h$

soit $(\alpha_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ $\sum_{1}^{n} \alpha_k P_k = 0$

(méthode 1 récurrence), méthode 2 absurde

supposons $A = \{k \in [\![0,n]\!] / \alpha_k \neq 0\} \neq \emptyset$

Soit $d^\circ P_j = \max\{d^\circ P_k / k \in A\}$

$\underbrace{\alpha_j P_j}_{\text{degré } d^\circ P_j} = \underbrace{-\sum \alpha_k P_k}_{\text{degré} \leq d^\circ P_j} \longrightarrow$ contradiction

$\Rightarrow$ A vide $\Rightarrow \forall k, \alpha_k = 0$

$\Rightarrow$ famille libre

2) $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / d^\circ P \leq n\}$

base canonique : $(X^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$; $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$

par 1), cette famille B est libre de cardinal $n+1$

donc B base

3) par 1), la famille est libre. Mq B génératrice

soit $P \in \mathbb{K}[X]$ mq $\exists (\alpha_k)_{k \in [\![0,n]\!]} / P = \sum_{0}^{n} \alpha_k P_k$

soit $n \in \mathbb{N}, n \geq d^\circ P \Rightarrow P \in \mathbb{K}_n[X]$

$(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$, par 2) $\exists (\alpha_k)_{k \in [\![0,n]\!]} / P = \sum_{0}^{n} \alpha_k P_k \in \mathrm{Vect}\, B$

Remarque 1 P(1) valable pour autre chose que deg :

valuation, multiplicité vis à vis d'1 racine...

Ex $P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-k}$, $k \in [\![0,n]\!]$

famille échelonnée p/r à la multiplicité des racines

$\rightarrow$ famille libre

Remarque 2 dans P(3), peut-on remplacer deg par val ? NON

$P_k = (X+1) X^k$; $k \in \mathbb{N}$; $v(P_k) = k$

$\mathrm{vect}(P_k) \overset{?}{=} \mathbb{K}[X]$ NON

$= (X+1)\mathbb{K}[X]$

Ex applications PN de n variables de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}$

$n \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

on note $p_\alpha : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

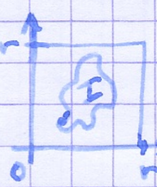
(ex : $n=2$, $\alpha = (1,2)$, $p_\alpha : (x,y) \mapsto xy^2$)

$p_\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ muni des lois $+$, $\cdot$ } $\mathbb{K}$ ev

Soit $\mathcal{B} = (p_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

On note $\mathcal{P}ol(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ le sev de $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ engendré par $\mathcal{B}$ — $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathcal{P}ol(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

vérifions $\mathcal{B}$ libre : $\boxed{\text{écriture pour } n=2}$ $\mathcal{P}ol(\mathbb{K}^2, \mathbb{K})$



$\mathcal{B}$ libre ssi toute sous famille finie est libre

$I \subset \mathbb{N}^2$ finie, il existe $r \in \mathbb{N}$ tq $I \subset [\![0, r]\!]^2$

Soit $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in [\![0,r]\!]^2}$ tq $\sum_{(i,j) \in [\![0,r]\!]^2} \lambda_{i,j} \, p_{i,j} = 0$

mq $\lambda_{i,j} = 0$ $\forall i, j$

$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2$ $\quad \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} \lambda_{i,j} \, x^i y^j = 0$

$$\sum_{i=0}^{r} \left(\sum_{j=0}^{r} \lambda_{i,j} \, y^j \right) x^i = 0$$

$\mathbb{K}$ infini

Or $(x \mapsto x^i)_{i \in [\![0, r]\!]}$ base de $\mathcal{P}ol_r(\mathbb{K}, \mathbb{K})$

($\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{K}$ tq

$\forall x \in \mathbb{K}$, $\sum_{i=0}^{r} \mu_i x^i = 0$ $\qquad \sum_{i=0}^{r} \mu_i X^i$ s'annule sur $\mathbb{K}$ infini donc nul

$\Rightarrow \forall i \in [\![0, r]\!], \mu_i = 0$)

Donc $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $\sum_{j=0}^{r} \lambda_{i,j} \, y^j = 0$ $\quad \forall y \in \mathbb{K}$

idem, $\forall i, j$ $\lambda_{i,j} = 0$

$\boxed{\text{Cas général}}$ récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

$(p_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ libre ds $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, il suffit de mq $(p_\alpha)_{\alpha \in [\![0, r]\!]^n}$ libre

partie finie

($I \in \mathcal{PF}(\mathbb{N}^n)$ $\exists r \in \mathbb{N}$, $I \subset [\![0, r]\!]^n$)

$(\lambda_{i_1, \dots, i_n})_{(i_1, \dots, i_n) \in [\![0, r]\!]^n}$ tq $\sum \lambda_{i_1, \dots, i_n} \, p_{i_1, \dots, i_n} = 0$

ie $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i_1=0}^{r} \left(\sum_{(i_2,\dots,i_n) \in [\![0,r]\!]^{n-1}} \lambda_{i_1,\dots,i_n} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \right) x_1^{i_1} = 0$

$\Rightarrow \forall i_1 \in [\![0, r]\!], \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n-1},$

$$\sum_{i_2,\dots,i_n} \lambda_{i_1,\dots,i_n} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = 0$$

HR $\Rightarrow \forall i_2, \dots, i_n \quad \lambda_{i_1,\dots,i_n} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{B}$ libre

Bilan $Pol(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ base canonique

ex $f \in Pol(\mathbb{K}^3, \mathbb{K})$

$f : (x, y, z) \mapsto 3x^2yz + y^3 z^{13}$

2) Sommes finies de sev, sev supplémentaires

a) Somme de 2 sev

Prop E $\mathbb{K}$ev, A, B sev de E

- Alors $A + B = \{a + b \,/\, (a, b) \in A \times B\}$ sev de E
- Cette somme est directe si $\forall x \in (A+B)\ \exists! (a, b) \in A \times B$ tq $x = a + b$ ie $A \cap B = \{0\}$

  On note alors $A + B = A \oplus B$

- A, B supplémentaires ds E si $A \oplus B = E$

  ie $E = A + B$ et $A \cap B = \{0\}$

  ie $\forall x \in E, \exists! (a, b) \in A \times B \quad x = a + b$

Dans ce cas, on peut définir la projection sur A parallèlement à B ; $p : \underset{\in A}{x_A} + \underset{\in B}{x_B} \longmapsto x_A$

Cas où E DF

P_1 E $\mathbb{K}$ev de dim n $\quad A, B$ supplémentaires de E

Alors $\dim E = \dim A + \dim B$

On peut déterminer 1 base de E par concaténation de 2 bases de A et B

$\dim A = p$, $\dim B = q$ $(e_1, \dots, e_p)$ base de A
$(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ base de B

$\forall x \in E$, $\exists ! (a,b) \in A \times B$ $x = a + b$

$a = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$

$b = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i$

$x = \sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i e_i$

$(e_1, \dots, e_{p+q}) = (e_1, \dots, e_p) \sqcup (e_{p+1}, \dots)$ famille génératrice de E

libre $\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i e_i = 0$

$0 + 0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i}_{x_A} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i}_{x_B} = 0$

unicité de l'écriture $\begin{cases} x_A = 0 \\ x_B = 0 \end{cases}$ puis $\alpha_i = 0$

$p + q = n$.

P2 (Existence d'1 supplémentaire d'un sev)

Soit E Kevdf $\forall A$ sev de E, $\exists B$ sev de E / $E = A \oplus B$

Construction $\dim A = p$ $p = 0 \Rightarrow B = E$

$p \geq 1$ $(e_1, \dots, e_p)$ base de A donc libre

TBI $\rightarrow$ complétée en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$B = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, on a $E = A \oplus B$

Rappel relation de Grassmann

Prop E Kevdf ; A, B sev qcq alors

alors $\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$

Csq - E Kevdf ; A, B sev de E ; on a $E = A \oplus B$ si deux des 3 prop suivantes sont réalisées

(1) $E = A + B$ (2) $A \cap B = \{0\}$ (3) $\dim E = \dim A + \dim B$

démo (2) + (3) $\Rightarrow$ (1)

$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \cancel{\dim(A \cap B)} = \dim E$

$A + B$ sev de E donc $A + B = E$

b) Somme finie de sev

Def E Kev ; $p \in \mathbb{N}^*$; $F_1, \dots, F_p$ sev de E

$F_1 + \dots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \;/\; (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p \right\}$

Prop C'est un sev de E.

Rem ▶ $A+B+C = (A+B)+C$

▶ $A+A=A$

Def $F_1, \dots, F_p$ sev de E, $G = \sum_{i=1}^{p} F_i$

cette somme est dite directe si

$\forall y \in G, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, y = \sum_{i=1}^{p} x_i$ (écriture unique)

On écrit alors $G = F_1 \oplus \dots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

On dit $F_1, \dots, F_p$ sev supplémentaires si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

ie $\forall y \in E, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, y = \sum_{i=1}^{p} x_i$

Prop $F_1, \dots, F_p$ sev de E, $G = \sum_{i=1}^{p} F_i$

cette somme est directe ssi $\forall i \in [\![1,p]\!], F_i \cap \sum_{\substack{j \in [\![1,p]\!] \\ j \neq i}} F_j = \{0\}$

⚠ test faux : $F_i \cap F_j = \{0\}$ ne marche pas

Démo $\Rightarrow$ Soit $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) \ni x$

$$\left| \begin{array}{ll} x \in F_i & \forall j \neq i \\ x \in \sum_{j \neq i} F_j & \exists x_j \in F_j \\ & x = \sum_{j \neq i} x_j \\ \text{soit } x_i = -x & \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} x = 0 = \sum_{j=1}^{p} 0$$

par unicité de l'écriture $x_i = 0 = -x$

$x = 0$

$\Leftarrow$ Soit $x \in G$

il existe $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

unicité ? supposons qu'il existe $(x'_1, \dots, x'_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} x'_i$$

$$x_i - x'_i = \sum_{\substack{j \in [\![1,p]\!] \\ j \neq i}} (x'_j - x_j) = 0 \qquad x_i = x'_i$$

Remarque $G_j = \sum_{i=1}^{j} F_i$ vérifie pour tout $j \in [\![1, p-1]\!]$, $G_j \cap F_{j+1} = \{0\}$

$F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_1 + F_2 \cap F_3 = \{0\}$ ...

Cas de la DF

Prop 1 E Kevdf ; $F_1, \dots, F_p$ sev de E

Alors $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \Leftrightarrow \dim \sum_{j=1}^{p} F_j = \sum_{j=1}^{p} \dim F_j$

Démo $(\Rightarrow)$ récurrence sur p à partir de $p=2$

$$G = \bigoplus_{j=1}^{p} F_j = \left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} F_j\right) \oplus F_p$$

NB Grassmann $\dim(A+B) < \dim A + \dim B$ si $A \cap B \neq \{0\}$

en général $\dim \sum F_j \leq \sum \dim F_j$

Prop 2 (Usage de bases)

Soit E Kevdf ; $F_1, \dots, F_p$ sev de E

Soit $\mathcal{B}_j = (e_{j1}, \dots, e_{jm_j})$ base de F_j $\forall j \in [\![1,p]\!]$

$\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{B}_p$" $= (e_{11}, \dots, e_{1m_1}, \dots, e_{p1}, \dots, e_{pm_p})$

Alors $E = \bigoplus_{j=1}^{p} F_j$ ssi $\mathcal{B}$ base de E

démo $(\Rightarrow)$ $x \in E$ $\quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j \quad , x_j = \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{j,k} e_{jk}$

$\mathcal{B}$ génératrice $\quad x = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{j,k} e_{jk}$

$\mathcal{B}$ libre $\quad 0 = \sum_j \underbrace{\sum_k \alpha_{j,k} e_{jk}}_{x_j} = 0 = \sum_j 0$

$\Rightarrow x_j = 0, \alpha_{j,k} = 0$

Def E Kevdf

① F sev de E

Une base $\mathcal{B}$ de E est <u>adaptée</u> à F si $\mathcal{B}$ obtenue par complétion d'1 base de F.

ie $\dim F = p$, $\dim E = n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_p)$ base de F

② $F_1, \dots, F_p$ sev de E supplémentaires, $\mathcal{B}$ base de E

$\mathcal{B}$ est adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ si $\mathcal{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,m_1}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,m_p})$

avec $(e_{j,1}, \dots, e_{j,m_j})$ base de F_j

Rem E Kev ; $F_1, \dots, F_p$ sev suppl

π_j proj sur F_j $//^t$ à $\sum_{i \neq j} F_i$

$x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{p} x_j$ $\quad x_j \in F_j \quad x_j = \pi_j(x)$

$id_E = \sum_{j=1}^{p} \pi_j \qquad \pi_j \circ \pi_k = \delta_{jk} \pi_j$

III) AL, th du rang

1) AL

E, F Kev (K cc)

$\mathcal{L}(E,F)$ ens des AL $E \to F$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ si $\begin{cases} u : E \to F \\ \forall (x,y) \in E, u(x+y) = u(x) + u(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in K ; u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$

sc $\forall (x,y) \in E, \forall \lambda \in K$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$

Rappels, compléments

P1) $\mathcal{L}(E,F)$ Kev si E, F Kev

si E, F Kevdf, $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

P2) E, F, G Kev

si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$

P3) E, F Kev $\quad E'$ sev de E alors $u(E')$ sev de F

F' sev de F alors $u^{-1}(F')$ sev de E

En particulier $\operatorname{Im} u = u(E)$ sev de F

$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0\})$ sev de E

2) Usage de la linéarité, usage des bases

Rem 1 $u : E \to F$ AL

$\to$ déterminée par $u(B)$ où B $\begin{cases} \text{génératrice de } E \\ \text{base} \end{cases}$

$B = (e_i)_{i \in I}$ $\quad x \in E \quad x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ où $(\alpha_i) \in K^I$ à support fini

$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i u(e_i)$

Prop E, F Kev

$\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ base de E

soit $\mathcal{G} = (f_i)_{i \in I} \in F^I$ alors $\exists! u \in \mathcal{L}(E,F)$

tq $u(\mathcal{B}) = \mathcal{G}$ ie $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$

démo $u : x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i f_i$ unique

ie $\mathcal{B}$ fixée, bijection $u \longrightarrow u(\mathcal{B})$
$\mathcal{L}(E,F) \to F^I$

Csq E, F Kev $\mathcal{B}$ base de E, $u \in \mathcal{L}(E,F)$

alors
- u surjective ssi $u(\mathcal{B})$ génératrice de F
- u injective ——— libre
- u bijective ——— base de F

démo (2) $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ libre $u(\mathcal{B}) = (u(e_i))_{i \in I}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $(\lambda_i) \in K^I$ à supp fini $\sum_{i \in I} \lambda_i u(e_i) = 0$ $u(\sum \lambda_i e_i) = 0 \overset{inj}{\Rightarrow} \sum \lambda_i e_i = 0 \overset{\mathcal{B} \text{ libre}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ker u : $x \in E$ $u(x) = 0$ si $x \neq 0$ (x) libre

$(u(x))$ libre $\to$ absurde $x = 0$

(1) $\mathcal{B} = (e_i)$ génératrice :

$\boxed{\Rightarrow}$ $u(\mathcal{B})$ engendre $\operatorname{Im} u = F$

$y \in F$, u surj $\exists x \in E$, $y = u(x)$

$\mathcal{B}$ génératrice, $x = \sum \lambda_i e_i$, $(\lambda_i) \in K^I$ supp fini

$y = \sum \lambda_i u(e_i) \in \operatorname{Vect}(u(\mathcal{B})) \to u(\mathcal{B})$ génératrice

$\boxed{\Leftarrow}$ $y \in F$, $u(\mathcal{B})$ gen de F ...

Exemples

1) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ base canonique $= (e_1, e_2, e_3)$, $u \in \mathcal{L}(E)$

$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ _ Ker u ? Im u ? rg(u) ?

- $AX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x, y, z) = (x, -x, 0)$ $\underline{\text{Ker } u = \operatorname{Vect}((1, -1, 0))}$

▶ $rg(u) = \dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \ker u = 2$

$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(B))$ et $u(e_2) = u(e_1)$

$\Rightarrow \underline{\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_2), u(e_3))}$

et $u(e_2)$ et $u(e_3)$ sont non prop, ok

$\operatorname{Im} u$ est un plan d'eqn ds B $ax' + by' + cz' = 0$

$V \in \operatorname{Im} u$ ssi $(V, u(e_1), u(e_3))$ est liée

$\Leftrightarrow \operatorname{Det}_B(V, u(e_1), u(e_3)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x' & 1 & 0 \\ y' & 1 & 1 \\ z' & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{x' - 2y' + z' = 0}$

2) $E = \mathbb{R}[X]$ $u : P(X) \mapsto P(X+1)$, $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$

$v : P(X) \mapsto P(X+1) + P(X)$ — $\ker$, Im ?

▶ mq $u \in \mathcal{L}(E)$ $P(X) = \sum a_k X^k$, $u(P(X)) = \sum a_k (X+1)^k$

$\forall (P, Q) \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$u(\lambda P + Q) = \lambda P(X+1) + Q(X+1)$ donc $u \in \mathcal{L}(E)$

▶ inj, surj, bij

Soit $B = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ base can.. soit $P_k = (X+1)^k$ de degré k

(P_k) base de $\mathbb{R}[X]$ $\Rightarrow \boxed{u \in GL(E)}$.

Variante : soit $v : P(X) \mapsto P(X-1)$

$u \circ v = v \circ u = id_E$

▶ $v = u + id_E$ $q_k = v(X^k)$ de degré k ... $\boxed{v \in GL(E)}$

▶ $\Delta \in \mathcal{L}(E)$, $\ker \Delta = \mathbb{R}_0[X]$

Justification : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, $P(X+1) = P(X)$, donc $\Delta(P) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $P \in \ker \Delta$

Si $P(X+1) = P(X)$, par récurrence : $\forall n$, $P(X+n) = P(X)$

Soit $\left| \begin{array}{l} Q(X) = P(X) - P(0) \\ \forall n, \ Q(n) = P(n) - P(0) = 0 \end{array} \right.$ $\rightarrow \infty^{té}$ de racines $\rightarrow Q(X) = 0$ et $P(X) = P(0)$

$\Rightarrow \ker \Delta = \mathbb{R}_0[X]$

$n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$

$d^\circ \Delta(X^k) = k - 1$ $\Rightarrow \operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Vect} \Delta(B) = \operatorname{Vect} \Delta(X^k), k \neq 0$

$\rightarrow \Delta$ surj

4

3) Codimension

Lemme E Kev, F sev de E, soient G_1, G_2 2 sev de E

tq $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$

Soit p la projection sur G_1 //^{t} à F

alors $\tilde{p} : \begin{array}{l} G_2 \longrightarrow G_1 \\ x \longmapsto p(x) \end{array}$ est un isomorphisme

Démo $p \in \mathcal{L}(E)$ et $\tilde{p} \in \mathcal{L}(G_2, G_1)$

• $\mathrm{Ker}\, \tilde{p} = \{ x \in G_2 \,/\, p(x) = 0 \}$

$x \in G_2$, $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in G_1$

$x \in \mathrm{Ker}\, \tilde{p}$: $p(x) = z = 0 \Rightarrow x = y \in F \cap G_2$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, \tilde{p} = \{0\} \Rightarrow \tilde{p}$ injective

•• Soit $t \in G_1$; $t = p(t)$

$t \in E$, $E = F \oplus G_2$, $\exists (t', t'') \in F \times G_2$ $t = t' + t''$

$t = p(t) = \underbrace{p(t')}_{0} + p(t'') = \tilde{p}(t'')$ $\Rightarrow t \in \mathrm{Im}\, \tilde{p}$

$\Rightarrow \tilde{p}$ inj □

Déf E Kev, F sev de E

ODQ F est de codimension finie s'il existe G sev de E de dimension finie supplémentaire de F, ie $E = F \oplus G$

alors $\mathrm{codim}(F)$ définie par $\dim(G)$ (indep de G par le lemme)

NB si Kevdf, $\mathrm{codim}\, F = \dim E - \dim F$

ex (Déf) E Kev

H sev de E hyperplan de E ssi est de codimension 1.

4) Th du rang

E, F Kev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ $\mathrm{Ker}\, u$ sev de E, $\mathrm{Im}\, u$ sev de F

Déf Lorsque $\mathrm{Im}(u)$ est DF $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}\, u$

C'est le cas si F DF.

TR Soient E, F Kev avec FDF et $u \in \mathcal{L}(E,F)$

① Tout sev supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ est isomorphe à $\operatorname{Im} u$

(par $\tilde{u} : H \to \operatorname{Im} u$, $x \mapsto u(x)$)

② $\operatorname{Ker} u$ est de codimension finie et $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u$

En particulier

- Si E, F Kevdf, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$
- Si de plus $\dim E = \dim F$: u surj $\Leftrightarrow$ u inj $\Leftrightarrow$ u bij

Démo

① $E = H \oplus \operatorname{Ker} u$ $\quad \tilde{u} : H \to \operatorname{Im} u$, $x \mapsto u(x)$ est dans $\mathcal{L}(H, \operatorname{Im} u)$

inj $\quad \operatorname{Ker} \tilde{u} = \{x \in H / u(x) = 0\} = H \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$

surj $\quad$ soit $y \in \operatorname{Im} u$

$\exists x \in E$, $y = u(x)$ $\quad$ or $E = H \oplus \operatorname{Ker} u$

$\exists (t, s) \in H \times \operatorname{Ker} u$, $x = t + s$

$y = u(x) = u(t) + \cancel{u(s)} = \tilde{u}(t) \in \operatorname{Im} \tilde{u}$ $\quad$ $\tilde{u}$ surj

② $\to$ Fabriquer 1 tel H

$\operatorname{Im} u$ sev de F, DF admet base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$

où $\left| \begin{array}{l} \varepsilon_j \in \operatorname{Im} u \\ \varepsilon_j = u(e_j) \end{array} \right.$ il existe $e_j \in E$ $\quad (1 \leq j \leq r)$

soit $H = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ (vérif : $\dim H = r$ et $H \oplus \operatorname{Ker} u = E$)

- $(e_1, \dots, e_r)$ libre ?

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ tq $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0$

on applique u : $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_i = 0$ or $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ base de $\operatorname{Im} u$ donc libre

et $\forall i$, $\lambda_i = 0$ $\quad$ **OK** $\quad \dim H = r$

•• $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im} u$ of base $(u(e_1), \dots, u(e_r))$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ $\quad u(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(e_i)$

$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in H$ $\quad u(x - y) = 0$ $\quad x - y \in \operatorname{Ker} u$

$x = y + (x - y)$ $\quad \Rightarrow E = H + \operatorname{Ker} u$

soit $t \in H \cap \operatorname{Ker} u$, $\quad 0 = u(t)$ et $t = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$

$$0 = u(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon_i \Big| \quad \forall i, \lambda_i = 0 \text{ et } t = 0$$
$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ libre

... ccl $E = H \oplus \operatorname{Ker} u$

codim $\operatorname{Ker} u = \dim H = r = rg\, u$

Rem 1 $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et pas seulement $u \in \mathcal{L}(E)$

Rem 2 On peut avoir u injective non surjective ou inversement

- Δ, $P \mapsto P'$ surj non injective
- $\int_0^x P(x)\,dx$ inj non surj

$\int_0^x P(x)\,dx = 0 \Rightarrow P = 0$ dérivation !!!!!!!!!!

5) Algèbres

Rappel K cc, E muni de 2 lci $+, \times$, 1 lce $\cdot$

E K-algèbre si

- $(E, +, \times)$ anneau
- $(E, +, \cdot)$ KEV
- $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K \quad \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Ex ① si V Kev alors $(\mathcal{L}(V), +, \times, \cdot)$ K algèbre

unité $id_V = e$

② K_1, K_2 cc ; $K_1 \subset K_2$ K_2 extension de K_1

$+, \times$ dans K_1, K_2

$\cdot$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda \times x$ On vérifie que $(K_2, +, \times, \cdot)$ K_1 algèbre
$K_1 \times K_2 \to K_2$

$\mathbb{R} \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ ev} \\ \mathbb{Q} \text{ algèbre} \end{cases}$ $\mathbb{C} \begin{cases} \mathbb{R} \text{ ev} \\ \mathbb{R} \text{ algèbre} \end{cases}$

③ E ens qcq, F K alg $(\mathcal{A}(E,F), +, \times, \cdot)$ K alg

$$\begin{cases} f+g : x \mapsto f(x)+g(x) \\ f \times g : x \mapsto f(x) g(x) \\ \lambda.f : x \mapsto \lambda f(x) \end{cases}$$

IV) Applications

1) Interpolation de Lagrange

$K \subset \mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ 2à2 distincts $n \in \mathbb{N}^*$

Pb : Etant donné $b_1, \dots, b_n \in K$, peut-on trouver $P \in K[X]$ tq $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$

Sol : ① 1 seule solution dans $K_{n-1}[X]$

② → toutes les solutions

On considère $u : K[X] \to K^n$, $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ u surjective ?

!! $u \in \mathcal{L}(K[X], K^n)$

soit $\tilde{u} = u_{/K_{n-1}[X]} \in \mathcal{L}(K_{n-1}[X], K^n)$

Ker $\tilde{u}$

$P \in \ker u \iff P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$

$\iff \prod_{j=1}^{n} (X - a_j) / P$

si de plus $d^\circ P \leq n-1$ ie $\ker \tilde{u} = \{0\}$
$(\Rightarrow P = 0)$

$\dim K_{n-1}[X] = n = \dim K^n$

TdR $\Rightarrow \tilde{u}$ isomorphisme

donc $\forall (b_1, \dots, b_n) \in K^n$, $\exists! P_0 \in K_{n-1}[X]$
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_0(a_i) = b_i$

expression P_0

Base canonique de K^n : $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$

soit "$L_i = \tilde{u}^{-1}(\varepsilon_i)$" ie $\tilde{u}(L_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$
$= (L_i(a_1), \dots, L_i(a_n))$

ie $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$

$j \neq i$ a_j racine de L_i ie $(X - a_j) / L_i$

on a $Q_i = \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} (X - a_j) / L_i$ $d^\circ L_i \leq n-1$

$\Rightarrow L_i = \lambda_i Q_i$

or $L_i(a_i) = 1 \Rightarrow \lambda_i = \dfrac{1}{Q_i(a_i)}$

cl PN d'interpolat° de Lagrange

en posant $L_i(X) = \prod_{\substack{j\in[1,n]\\ j\neq i}} \frac{(X-a_j)}{(a_i-a_j)}$

alors $(L_1, \dots, L_n)$ base de $K_{n-1}[X]$

$\forall P \in K_{n-1}[X]$, $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$

$A = \prod (X-a_j)$

cl $\mathcal{S} = \{P_0 + R \,/\, R \in \mathrm{Ker}\, u\}$

où $P_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$

$\mathrm{Ker}\, u = \{(\prod_{j=1}^{n} (X-a_j)) H, H \in \mathbb{K}[X]\}$

autres solutions $P \in K[X]$ tq $u(P) = u(P_0) \iff P - P_0 \in \mathrm{Ker}\, u$
$\iff A \mid P - P_0$

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(X) + \left(\prod_{i=1}^{n} (X-a_i)\right) Q(X) \,/\, Q \in K[X] \right\}$$

▸ $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$

- card $\mathcal{L} = n =$ card $\mathbb{K}_{n-1}[X]$
- $\mathcal{L}$ libre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ $L_i(a_j) = \delta_{ij}$

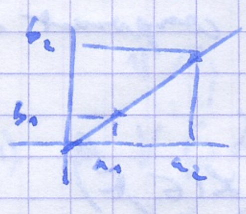
valeur en a_j : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j = 0$

Remarques 1) $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ entièrement déterminé par $P(a_i)$ $1 \le i \le n$

2) Cas $n=2$ interpolation affine

$a_1 \neq a_2$; $b_1, b_2 \in K$

$P \in K_1[X]$ tq $P(a_i) = b_i$, $1 \le i \le 2$ $(f : x \mapsto \alpha x + \beta)$ α coef dir



▸ $P(X) = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(X - a_1) + b_1$

▸ $L_1(X) = \frac{X - a_2}{a_1 - a_2}$ $L_2(X) = \frac{X - a_1}{a_2 - a_1}$

et $P(X) = b_1 L_1(X) + b_2 L_2(X)$

3) Généralisation interpolation Lagrange - Hermite

$a_1, \dots, a_n \in K$ 2 à 2 distincts ; $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ dans K

$P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\forall i \in [1, n]$ $\begin{cases} P(a_i) = b_i \\ P'(a_i) = c_i \end{cases}$

$v : \mathbb{K}[X] \longrightarrow K^{2n}$
$Q \longmapsto (Q(a_1), \dots, Q(a_n), Q'(a_1), \dots, Q'(a_n))$

P ? $v(P) = (b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) = B$

pb linéaire   compatibilité ? $B \in \operatorname{Im} v$

si oui sol particulière P_0

sol gén P $v(P) = v(P_0)$

$\iff P - P_0 \in \operatorname{Ker} v$

Ker v $Q \in \operatorname{Ker} v$ $\left|\begin{array}{l} Q(a_i) = 0 \\ Q'(a_i) = 0 \end{array}\right.$ $1 \leq i \leq n$ $\iff \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^2 / Q$

soit $\tilde{v} = v_{/\mathbb{K}_{2n-1}[X]}$ bijectif $\to$ isomorphisme

$\Rightarrow \exists! P_0 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X] \,/\, \tilde{v}(P_0) = B$

2) Usage de la composition — Réduction, Rang

ⓐ Conservation noyaux ou images

E, F Kevdf $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$\operatorname{Ker} u = \{x \in E / u(x) = 0\}$

$\operatorname{Im} u = \{u(x) / x \in E\}$

Rem 1 $v \in \mathcal{L}(F, G)$ injective alors $\operatorname{Ker} v \circ u = \operatorname{Ker} u$

car $v(u(x)) = 0 \iff u(x) = 0$

Rem 2 $v \in \mathcal{L}(G, E)$ surjective alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u \circ v$

Prop E, F, G Kev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Si v isomorphisme de F vers G alors $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$

———— G — E — $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$

En particulier E, F Kevdf, rg u conservé en composant u à gauche ou à droite par un isomorphisme

Invariance du rang E, F, G Kevdf, $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$v \in \operatorname{Isom}(F, G)$: $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(v \circ u)$

$v \in \operatorname{Isom}(G, E)$: $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u \circ v)$

(b) Première réduction d'1 AL

Th E, F Kev soit A, B sev de E supplémentaires

$$\phi \left\| \begin{array}{l} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(A,F) \times \mathcal{L}(B,F) \\ u \mapsto (u_{/A}, u_{/B}) \end{array} \right.$$

Alors ϕ est un isomorphisme.

Trad : $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions à A et B

Démo ▸ ϕ linéaire

$\left| \begin{array}{l} u, v \in \mathcal{L}(E,F) \\ \lambda \in K \end{array} \right.$ $(u+\lambda v)_{/A} = u_{/A} + \lambda v_{/A}$ car - 2 applic $A \to F$ - m action sur tt vecteur de A

$\phi(u+\lambda v) = \left((u+\lambda v)_{/A}, (u+\lambda v)_{/B}\right) = \dots = \phi(u) + \phi(v)$

▸ ϕ bijectif

Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(A,F) \times \mathcal{L}(B,F)$, trouver $u \in \mathcal{L}(E,F)$ unique tq $u_{/A} = \varphi$ et $u_{/B} = \psi$

unique candidat : $x \in E$ $x = x_A + x_B$ avec $x_A \in A$, $x_B \in B$

et $u(x) = u(x_A) + u(x_B) = \varphi(x_A) + \psi(x_B)$ il convient □

Rmq itération possible avec $E = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$

Exemples

Ex 1 E Kev dimf A sev de E de dim r

$V = \{ u \in \mathcal{L}(E) \,/\, A \subset \operatorname{Ker} u \}$

1) mq V sev de $\mathcal{L}(E)$ 2) dim V ?

1) ▸ $V \subset \mathcal{L}(E)$

▸ $V \neq \emptyset$ car $0 \in V$ ($\operatorname{Ker} 0 = E$

▸ Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ $\lambda \in K$

$A \subset \operatorname{Ker} u$, $A \subset \operatorname{Ker} v$ mq $A \subset \operatorname{Ker}(u + \lambda v)$

$x \in A$, $(u+\lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) = 0$

2) $u_{/A} = 0$, soit B un sev de E suppl de A ($A \oplus B = E$)

$\left| \begin{array}{l} u \mapsto u_{/B} \\ V \to \mathcal{L}(B,E) \end{array} \right. : \psi$ mq ψ isomorph

- φ linéaire : ok
- φ bijective : $\forall v \in \mathcal{L}(B, E)$, $\exists !\, u \in V$ tq $\varphi(u) = v$

$$\begin{pmatrix} x \in E, \ x = x_A + x_B \\ u(x) = v(x_B) \quad \text{unique et convient} \end{pmatrix}$$

On cherche u tq $u_{/B} = v$ $\quad u \in \mathcal{L}(E)$

$u : E \longrightarrow E$

$x = x_A + x_B \longmapsto u(x_A) + u(x_B) = v(x_B) \qquad u \in V : u(x_A) = 0$

Pour l'isomorp, $\dim V = \dim \mathcal{L}(B, E) = \dim E \times \dim B$
$= n(n-r)$

Ex2 E Kevdf $\dim E = n \geq 1$ $\quad f \in \mathcal{L}(E)$ donné

$\Phi : g \mapsto f \circ g$, $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$; $\Psi : g \mapsto g \circ f$, $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$

pour demain • vérifier $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$
•• trouver $rg\, \Phi$, $rg\, \Psi$ en fct de $r = rg\, f$

indice : noyau

3) Endomorphismes particuliers

ⓐ E Kev

$\mathcal{L}(E)$: K-algèbre $+, \circ, \cdot$ — non commutative en général
— non intègre

NB : $u \circ v = 0 \not\Rightarrow u = 0, v = 0$

$GL(E) = Isom(E, E)$

Prop $(GL(E), \circ)$ groupe

Si E df, pour $u \in \mathcal{L}(E)$

$u \in GL(E) \Leftrightarrow \ker u = \{0\} \Leftrightarrow rg\, u = \dim E \Leftrightarrow \det u \neq 0$

ⓑ Projections, symétries MPSI

Def/Prop E Kev

① Si A et B sont 2 sev suppl de E, p proj sur A $//^t$ à B
$(p : x_A + x_B \mapsto x_A)$

Alors $\left|\begin{array}{l} p \in \mathcal{L}(E), \ p^2 = p \\ \ker p = B, \ Im\, p = A \end{array}\right.$

② Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$. Alors $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et p projection sur Im, $//^t$ à Ker,
et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - id_E)$

démo ② $\left| \begin{array}{l} E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p \\ \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0\} \end{array} \right.$ $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$
et $x = p(y)$, $p(x) = 0 = p^2(y) = p(y) = x$

Rem ① p projection, $q = id_E - p$ projection
② E df p projection $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$
$\mathcal{B}$ base adaptée à cette somme directe $r = \mathrm{rg}\, f$

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \qquad tr(p) = r = \mathrm{rg}\, p$$

sinon $x_A - x_B = x_A + x_B$!

E Kev, $\mathrm{caract}(\mathbb{K}) \neq 2$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Def / Prop ① Soient A, B sev suppl
$s : x_A + x_B \mapsto x_A - x_B$ symétrie par rapport à A de direction B

Alors $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = id_E$ $s \in GL(E)$ et $s^{-1} = s$

② Réciproquement, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tq $s^2 = id_E$. Alors si $A = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $B = \mathrm{Ker}(s + id_E)$, $E = A \oplus B$ et s symétrie pr à A $//^t$ à B.

Démo ② $s = p - q$ $q = id_E - p$
$\Rightarrow s = 2p - id_E$ avec p proj $/A$ $//^t$ B

$A \oplus B = E$ $\left\{ \begin{array}{l} A + B = E : x = \underbrace{\dfrac{x + s(x)}{2}}_{\in A} + \underbrace{\dfrac{x - s(x)}{2}}_{\in B} \\ A \cap B = \{0\} : s(x) = x = -x \\ \quad 2x = 0,\ x = 0 \end{array} \right.$

Rem E df n, $\mathcal{B}$ base adaptée à $E = A \oplus B$

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right] \quad \text{où } r = \dim A$$

$\det s = (-1)^{n-r}$, $tr(s) = r - (n-r) = 2r - n$

ex 10 $E = M_n(\mathbb{R})$ $s : M \mapsto {}^tM$, $E \to E$

$s^2 = id_E$

$A = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M \} = S_n(\mathbb{R})$ ← matrices sym

$\dim A = \frac{n(n+1)}{2}$

$B = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tM = -M \} = A_n(\mathbb{R})$ ← matrices antisym

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \quad j \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \end{array}$$

(E_{ij}) base canonique de $M_n(\mathbb{R})$

$A = (a_{ij})$

$A = \sum_i \sum_j a_{ij} E_{ij}$

${}^tM = M \iff \forall i,j \; a_{ij} = a_{ji}$

$\Rightarrow M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + \sum_i a_{ii} E_{ii}$

or $(E_{ij} + E_{ji})$ base de $S_n(\mathbb{R})$

© Homothéties

E Kev

$\lambda \in K$, $h_\lambda = \lambda \, id_E$

$H = \{ h_\lambda / \lambda \in K \}$ sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à K $f \Big| \begin{array}{l} \lambda \mapsto \lambda \, id_E \\ K \to H \end{array}$

Rem H centre de $\mathcal{L}(E)$

$\{ f \in \mathcal{L}(E) / \forall g \in \mathcal{L}(E) \; f \circ g = g \circ f \} = H$

Ex 2 E Kev $f \in \mathcal{L}(E)$ fixée $\dim E = n$, $rg f = r$

$\varphi : g \mapsto f \circ g$ $\psi : g \mapsto g \circ f$

1) mq $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$

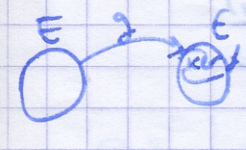
$(g, g') \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in K$

$\varphi(\lambda g + g') = f \circ (\lambda g + g') = \lambda f \circ g + f \circ g'$ par les règles de calcul de $\mathcal{L}(E)$

idem pour ψ

2) $g \in \ker \varphi \Rightarrow f \circ g = 0 \Rightarrow \forall x \in E$, $f(g(x)) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} g \subset \ker f$



$\ker \varphi = \{ g \in \mathcal{L}(E), \operatorname{Im} g \subset \ker f \}$

$\dim \ker \varphi = \dim \mathcal{L}(E, \ker f) = n \times (n - r)$

$\Rightarrow rg \varphi = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \ker \varphi = nr$

Rem Si $f \in GL(E)$ alors φ bijective

$\forall h \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! \, g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = h$ ie $g = f^{-1} \circ h$

- $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = 0 \}$
$= \{ g \in \mathcal{L}(E) / g_{/\mathrm{Im} f} = 0 \}$
$= \{ g \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker}\, g \}$

$E = H \oplus \mathrm{Im} f$

soit $P \,\Big|\, \begin{array}{l} \mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathcal{L}(H, E) \\ g \mapsto g_{/H} \end{array}$ mq P isomorp

* linéarité ok

* P injectif $\forall u \in \mathrm{Ker}\, P \quad u_{/H} = 0$

$u \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow u_{/\mathrm{Im} f} = 0 \Rightarrow u = 0$

(soit $x \in E$, $x = x_H + x_{\mathrm{Im} f}$
$u(x) = u(x_H) + u(x_{\mathrm{Im} f}) = u_{/H}(x) + u_{/\mathrm{Im} f}(x) = 0$)

P surj

$\mathrm{Im}\, P \subset \mathcal{L}(H, E)$, $\supset$?

soit $h \in \mathcal{L}(H, E)$ $\quad u \in \mathrm{Ker}\,\varphi \,/\, u_{/H} = h$

$u = x = x_{/H} + x_{/\mathrm{Im} f} \longrightarrow h(x_H)$

$u_{/\mathrm{Im} f} = 0$ donc $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$

donc P bij

d'où $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathcal{L}(H, E) = (n - r) n$

TdR $\Rightarrow \mathrm{rg}\,\varphi = nr$

d) Endos nilpotents

E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$

Def u nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $u^k = 0$

indice : $p = \min \{ i \in \mathbb{N}^* / u^i = 0 \}$ caractérisé par $\begin{cases} u^{p-1} \neq 0 \\ u^p = 0 \end{cases}$

Ex 1 $E = \mathbb{K}_n[X]$, $D : \begin{array}{l} P \mapsto P' \\ E \to E \end{array}$ nilpotent d'indice $p = n+1$

$\forall P \in E$, $P^{(n+1)} = 0$ donc $p \leq n+1$ $\quad D^{n+1} = 0$

mais $D^n \neq 0$ $\quad D^n(X^n) = n! \neq 0$

$\mathcal{B} = (1, \ldots, X^n)$

$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Rem E kevdf, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}$ base de E

tq $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(D)$ soit strictement triangulaire.

$\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_N)$ si $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(D)$ strict tri sup

($N = \dim E$) $\quad \text{Im}\, u \subset \text{Vect}(c_1, \ldots, c_{N-1})$

2 prop à connaître :

Prop 1 E kevdf $\dim E = n \geq 1$ $\quad u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p

alors $p \leq n$

Dem $\left.\begin{array}{l} u^p = 0 \\ u^{p-1} \neq 0 \end{array}\right\} \exists x_0 \in E,\ u^{p-1}(x_0) \neq 0$

Mq $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ libre

$\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tq $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$

$\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$

Méthode 1 par récurrence : appliquer $u^{p-1} \Rightarrow \lambda_0 = 0$

on suppose $\lambda_0 = \ldots = \lambda_k = 0$, appliquer $u^{p-1-(k+1)}$ ...

$\Rightarrow \text{Card}\, \mathcal{L} = p \leq n$ $\quad \square$

Ex $A \in M_5(\mathbb{R})$ tq $A^{2008} = 0$, mq $A^{28} = 0$

soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ "canoniquement" associé à A

ie $\mathcal{C}$ base can, $A = M_{\mathcal{C}}(u)$

$u^{2008} = 0$ $\quad u$ nilpotent d'indice $p \leq \dim \mathbb{R}^5 = 5$

$u^5 = 0$, $A^5 = 0$

Prop 2 E Kev, $u \in \mathcal{L}(E)$ $\quad u$ nilpotent d'indice p

Alors $(id_E - u) \in GL(E)$ d'inverse $\sum_{k=0}^{p-1} u^k$

Démo identité géométrique ds l'anneau $\mathcal{L}(E)$

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} u^k\right)\circ\left(id_E - u\right) = id_E - \underbrace{u^p}_{=0}$$ par télescopage

Ex $E = \mathbb{R}_n[X]$ $\quad f : P + \dots + P^{(n)}$

mq $f \in GL(E)$, f^{-1} ?

▸ Sol 1 $\quad f \in \mathcal{L}(E)$, f bijective $\quad d^\circ f(P) = d^\circ P$ $\quad P \neq 0$

soit $\mathcal{B} = (1, \dots, X^n)$, $f(\mathcal{B})$ échelonnée en degré → base → bijection

$f(P) = Q \iff P = f^{-1}(Q)$

$P + P' + \dots + P^{(n)} = Q \to P' + \dots + P^{(n)} = Q'$

$\Rightarrow \underline{P = Q - Q' = f^{-1}(Q)}$

▸ Sol 2 $\quad D : P \mapsto P' \quad D \in \mathcal{L}(E) \quad D^{n+1} = 0$

$f = \sum_{k=0}^{n} D^k$, $f \circ (id_E - D) = id_E - D^{n+1} \Rightarrow \underline{f^{-1} = id_E - D}$

4) Algèbre engendrée par 1 elt

Rem utile et repris ds le chap sur la réduction

$(A, +, \times, \cdot)$ K-algèbre ($K \subset \mathbb{C}$) unité notée e (neutre $\times$)

Appl (1) A : sur corps de K $\quad$ A corps, $K \subset A$

(2) E K-ev $\quad A = \mathcal{L}(E)$ $\quad (A = M_n(K))$

Soit $a \in A$ donné, on considère l'algèbre engendrée par a : F (plus petite pour $\subset$, s alg de A contenant a)

$e \in F$, $a \in F$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a^k \in F$

F contient CL des a^k

$\lambda_0 e + \dots + \lambda_n a^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k$ où $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$

si on considère $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, on notera "$P(a)$" $= \sum_0^n \lambda_k a^k$

le PN de a

Prop 1 $\quad F = \{P(a) \mid P \in K[X]\}$

Prop 2 Soit $\Phi : \begin{vmatrix} P \mapsto P(a) \\ K[X] \to \mathcal{A} \end{vmatrix}$ définie par :

si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, $P(a) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k$

Alors Φ morphisme de K algèbre, dont $\mathrm{Im}\,\Phi$ est l'algèbre engendrée par a.

Vérifier : • $\Phi(1) = e$ par la déf

• $\forall P, Q \in K[X]$, $\forall \lambda \in K$:

$$\begin{vmatrix} \Phi(P + \lambda Q) = \Phi(P) + \lambda\, \Phi(Q) \\ \Phi(P \times Q) = \Phi(P) \times \Phi(Q) \end{vmatrix}$$

$$\text{Si } P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \quad (d^\circ P \leq n)$$

$$Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$$

$$\Phi(P + \lambda Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k + \lambda b_k) X^k = \Phi(P) + \lambda\, \Phi(Q)$$

$$P \times Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$$

$$(P \times Q)(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\, a^k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i a^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j a^j \right)$$
$$= P(a) \times Q(a)$$

Rem On peut abusivement écrire $\mathrm{Im}\,\Phi = K[a]$

Prop 3 $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{ P \in K[X] / P(a) = 0 \}$

ensemble des PN "annulateurs" de a (noté aussi $\mathrm{Ann}(a)$)

C'est un idéal de $K[X]$

Démo • On peut savoir $\mathrm{Ker}\,\Phi$ où $\Phi : U \to V$ morphisme d'anneaux → idéal

• $\mathrm{Ker}\,\Phi$ sous groupe add de $K[X]$

$P \in \mathrm{Ker}\,\Phi$
$Q \in K[X]$ $\quad (P \times Q)(a) = \underbrace{P(a)}_{0} \times Q(a) = 0$

Csq : Prop Si $\mathrm{Ker}\,\Phi \neq \{0\}$ alors il existe un unique $M \in K[X]$ unitaire ($d^\circ M \geq 1$) tq $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{ MV / V \in K[X] \}$

Déf M : PN minimal de a

Prop 4 (1) Si $\mathcal{A}$ dif alors $\ker \Phi \neq \{0\}$

(2) Si $\ker \Phi \neq \{0\}$, et $r = d^\circ \Pi_a$ où Π_a PN minimal de a

Alors $(e, \dots, a^{r-1})$ base de $\mathrm{Im}\, \Phi$ ($r = \dim K[a]$)

Démo * (1) Si $\mathcal{A}$ de dim finie N

$\mathcal{L} = (e, a, \dots, a^N)$ Card $\mathcal{L} = N+1 > N$, $\mathcal{L}$ liée

$\exists \lambda_0, \dots, \lambda_N \in K$ non tous nuls tq $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k a^k = 0$

$P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$ $P \in \ker \Phi$, $P \neq 0$

* (2) $r = d^\circ \Pi_a \geq 1$ $\Pi_a = X^r + \dots + \mu_0$

▸ $(e, a, \dots, a^{r-1})$ libre !

en effet, s'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1} \in K$ tq $\sum \lambda_k x^k = 0$

alors $P = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k \in \ker \Phi$

Π_a / P donc $P = 0$ $\lambda_0 = \dots = \lambda_{r-1} = 0$

$(d^\circ \Pi_a = r, d^\circ P \leq r-1)$

▸ $\mathcal{B}$ génératrice :

$V \in K[X]$, DE par Π

$\exists Q, R \in K[X]$, $d^\circ R < r$

$V = \Pi Q + R \Rightarrow V(a) = \underbrace{\underbrace{\Pi(a)}_{0} Q(a)}_{0} + R(a)$

$R(a) \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{B}$

Rem Si $\mathcal{A}$ intègre et $\ker \Phi \neq \{0\}$

Alors Π_a irréductible dans $K[X]$ et $\mathrm{Im}\, \Phi$ est un corps

En effet • Si $\Pi_a = U \times V$, $\Pi_a(a) = U(a) \times V(a)$ $\Rightarrow U(a) = 0$ ou $V(a) = 0$

$\mathcal{A}$ intègre

$\Rightarrow \Pi_a / U$ ou Π_a / V

impossible cf degré

•• $\mathrm{Im}\, \Phi$ ss alg de $\mathcal{A}$

en particulier sous anneau

soit $\alpha \in K[a]$, $\alpha \neq 0$ avec $\alpha = P(a)$, $P \in K[X]$

ie $P \notin \ker \Phi$ — Soit $D = \mathrm{PGCD}(P, \Pi) = 1$

D / Π | D constant
Π irréductible

Bezout $PU + \Pi V = 1 \Rightarrow P(a)U(a) = e$

$\Rightarrow U(a)$ inverse de α

Ex $A = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}$, $a = \sqrt[3]{2}$, $\Phi : \begin{array}{l} P \mapsto P(a) \\ \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C} \end{array}$

$\ker \Phi =$

$\Pi = X^3 - 2$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

si $p/q = \alpha$ tq $\Pi(\alpha) = 0$ $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$

$p^3 = 2q^3$, $p/2$, $q/1 \Rightarrow \alpha = 1$ ou 2 non racine

$X^3 - 2 \in \ker \Phi$ $\quad \Pi / X^3 - 2$

$X^3 - 2$: pas de racines rat $\rightarrow$ irréductible

donc $\Pi = X^3 - 2$

$K =$ "$\mathbb{Q}[\alpha]$", $\mathbb{Q}$-ev de dim 3 $(1, \alpha, \alpha^2)$ $\mathbb{Q}$-base et c'est un sscorps de $\mathbb{R}$ _

Application $\alpha = 1 + a + 2a^2$

$\frac{1}{\alpha} = u + va + wa^2$ $\quad u, v, w \in \mathbb{Q}$

Pgcd $(1 + X + 2X^2 ; X^3 - 2) = 1$

U, V tq $U(1 + X + 2X^2) + V(X^3 - 2) = 1$

DE _ _ _ $\Rightarrow U$ et V

et $1/\alpha = U(a)$