MP 08/09 – Corrigé du D.S. de PHYSIQUE n°4

Exercice 1

1) Roulement sans glissement : $\vec{v}(I) = \vec{0}$.

Or : $\vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CI} = (R-r)\dot{\alpha}\,\hat{\alpha} + \dot{\theta}\,\hat{\imath} \wedge r\hat{r}$

$= [(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta}]\,\hat{\alpha}$

Donc : $\underline{(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = 0}$.

Commentaires : – $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$ sont de signes opposés, conformément à l'intuition

– si $R = r$, $\dot{\theta} = 0$: la sphère est bloquée sur le rail.

2) $E_p = -mg(R-r)\cos\alpha$

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v(C)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{Kœnig})$$

$$= \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2$$

$$\underline{E_m = E_c + E_p = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(R-r)\cos\alpha}$$

Avec le roulement sans glissement, la force de contact rail → sphère ne travaille pas, donc la sphère est un <u>système conservatif</u>

$$E_m = C^{te} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{7}{5} m (R-r)^2 \dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mg(R-r)\dot{\alpha}\sin\alpha = 0$$

$\dot{\alpha}$ non identiquement nul, donc : $\underline{\ddot{\alpha} + \frac{5g}{7(R-r)}\sin\alpha = 0}$

3) Petites oscillations autour de $\alpha = 0$: $\alpha \ll 1\,\text{rad}$ et $\sin\alpha \approx \alpha$

Alors : $\ddot{\alpha} + \frac{5g}{7(R-r)}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(t) = A\cos(\omega_{po} t + \varphi)$

avec $\omega_{po} = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$. Période : $\underline{T_{po} = \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}}$

4) La 2ème sphère a un mouvement de translation : $E_c^{(2)} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2$,

à comparer à $E_c^{(1)} = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, lorsque les sphères passent par une position α, elles ont la même énergie cinétique, égale au travail du poids entre α_0 et α (dans les deux cas la force rail → sphère ne travaille pas), ainsi $\dot{\alpha}^{(2)} > \dot{\alpha}^{(1)}$. <u>La sphère (2) arrive la première</u>

Ce résultat <u>ne change pas</u> si les masses sont différentes car le travail du poids <u>et</u> l'énergie cinétique (pour $\dot{\alpha}$ donné) sont proportionnels à la masse.

5) Intégrale première de l'énergie (sphère (2)) :

$$\frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(R-r)\cos\alpha = 0 - mg(R-r)\cos\alpha_0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{2g}{R-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

car α décroît

$$\Leftrightarrow \frac{-d\alpha}{\sqrt{\frac{2g}{R-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = dt$$

donc $$\underline{\tau = \sqrt{\frac{R-r}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}}.$$

C'est pareil pour la sphère (1) en remplaçant "$\frac{1}{2}$" par "$\frac{7}{10}$" et :

$$\underline{\tau' = \sqrt{\frac{7}{5}}\,\tau}.$$

Exercice 2

A.1) et 2) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$, donc :

$$\frac{dV}{dr} = \begin{cases} -\frac{k}{2\varepsilon_0} & \text{si } r \in [0,R] \\ -\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r \in [R,+\infty[\end{cases}$$

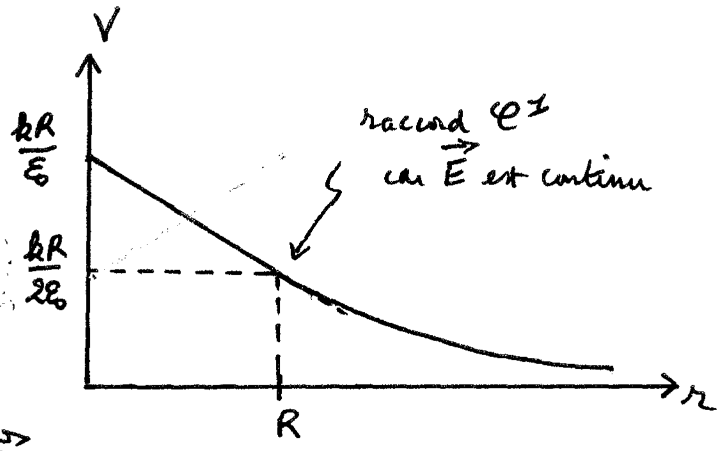
$$\Rightarrow \quad V = \begin{cases} -\frac{k}{2\varepsilon_0} r + A & \text{si } r \in [0,R] \\ \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r} + B & \text{si } r \in [R,+\infty[\end{cases}$$

Conditions aux limites :

- $V \to 0$ si $r \to \infty$ donc $B = 0$
- V continu en $r = R$ donc $A = \frac{kR}{\varepsilon_0}$

Finalement :

$$V = \begin{cases} \frac{k}{2\varepsilon_0}(2R - r) & \text{si } r \in [0,R] \\ \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{si } r \in [R,+\infty[\end{cases}$$

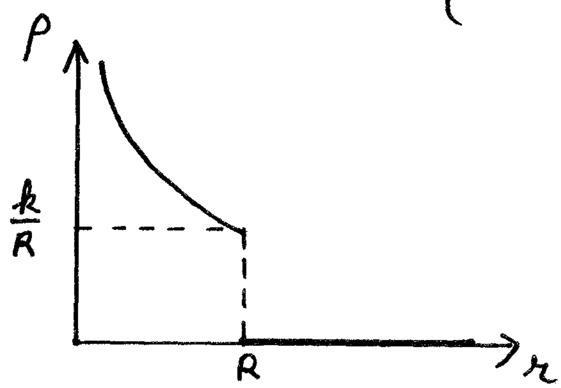


B.1) Maxwell-Gauss : $\rho = \varepsilon_0 \, \text{div}\, \vec{E}$

$$= \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E(r)\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{k}{r} & \text{si } r \in [0,R] \\ 0 & \text{si } r \in [R,+\infty[\end{cases}$$

2)



C.1) $\underline{dQ = \rho(r) \times 4\pi r^2 dr}$

2) $q_0 = \int_{r=0}^{\infty} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{k}{r} 4\pi r^2 dr = \underline{2\pi k R^2}$

3) Champ d'une charge ponctuelle q_0, placée en O :

$$\vec{E}_{c.p.} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{(loi de Coulomb)}$$

$$= \frac{2\pi k R^2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r = \vec{E}$$

$\underline{\vec{E} = \vec{E}_{c.p} \text{ pour } r > R \text{ uniquement}}$

4) flux du champ $\vec{E}$: $\Phi_E = \iint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \right) \cdot \left(r\, d\theta\, r \sin\theta\, d\varphi\, \vec{u}_r \right)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \times 4\pi = \frac{2\pi k R^2}{\varepsilon_0}$$

théorème de Gauss : $Q_{int} = \varepsilon_0 \Phi_E = 2\pi k R^2$

Toute sphère de rayon $r \geq R$, contient la même charge $2\pi k R^2$, qui est la charge totale q_0 de la distribution.

Problème

A.1) $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$, $E_p = \frac{1}{2} C\theta^2$ (le poids ne travaille pas)

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2$$

A.2) Pas de frottement $\Rightarrow E_m = C^{te}$

$$\frac{dE_m}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$

$\dot{\theta}$ non identiquement nul, donc : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$

Solution : $\theta(t) = A\cos(\omega_o t) + B\sin(\omega_o t)$ avec $\omega_o = \sqrt{\frac{C}{J}}$

Conditions initiales : $\theta(0) = \theta_o = A$

$\dot{\theta}(0) = 0 = B\omega_o$

Donc : $\theta(t) = \theta_o \cos(\omega_o t)$. Période : $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$

A.3)b) $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{frott}$ soit :

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$$

a) C'est le frottement de l'air sur le pendule.

c) $\ddot{\theta} + 2\lambda\omega_o\dot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$

équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda\omega_o r + \omega_o^2 = 0$

$\Delta' = \omega_o^2(\lambda^2 - 1) < 0$ car amortissement très faible

racines : $-\lambda\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{1-\lambda^2}$

Solution : $\theta(t) = e^{-\lambda\omega_o t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$

avec $\omega = \omega_o\sqrt{1-\lambda^2}$

Pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_o}{\sqrt{1-\lambda^2}}$

d) $T > T_0$ et on veut $|T - T_0| \leqslant \frac{T_0}{100}$ soit $T_0 < T < \frac{101}{100} T_0$

il faut : $\sqrt{1-\lambda^2} > \frac{100}{101}$ soit $\underline{\lambda < 1 - \left(\frac{100}{101}\right)^2 = 0{,}02}$

A.4) a) $\underline{\vec{\omega}^* = \vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{u}_z}$

b) $E_c^*(\text{surcharge}) = \underline{\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2}$

c) $E_c(\text{surcharge}) = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}(G_{\text{surcharge}})\right)^2 + E_c^*(\text{surcharge})$

$$= \frac{1}{2} m (d\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(md^2 + J_1)\dot{\theta}^2}$$

d) $E_c(\text{barre} + \text{surcharges}) = E_c(\text{barre}) + 2\,E_c(\text{surcharge})$

$$= \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + (md^2 + J_1)\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}(J_0 + 2J_1 + 2md^2)\dot{\theta}^2$$

donc $\underline{J = J_0 + 2J_1 + 2md^2}$

A.5) a) $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + 2J_1 + 2md^2}{C}}$ soit $T_0^2 = \frac{4\pi^2(J_0 + 2J_1)}{C} + \frac{8\pi^2 m}{C} d^2$

La courbe T_0^2 en fonction de d^2 est une droite de pente $\frac{8\pi^2 m}{C}$.

d^2 (m^2)	0,01	0,0225	0,324
T_0^2 (s^2)	117	177	225

On a donc par exemple :

$$\frac{8\pi^2 m}{C} = \frac{177 - 117}{0{,}0225 - 0{,}01}$$

$$\approx 4800\ s^2 m^{-2}$$

d'où $C \approx 8.10^{-4}\ \underbrace{kg\,m^2 s^{-2}}_{\text{ou } N.m}$

b) $\mu = \frac{32\,C\ell}{\pi \delta^4} \approx \underline{1{,}3.10^{11}\ kg.m^{-1}.s^{-2}\ (\text{ou } N.m^{-2})}$

B.1) a) $$E_{p,\acute{e}l} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 S_1S_2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

b) $$E_{p,\text{torsion}} = \frac{1}{2}C(\theta-\theta_b)^2 = \frac{1}{2}C\theta^2 \text{ si } \theta_b = 0$$

c) A l'équilibre $\dfrac{dE_p}{d\theta} = 0$ avec $E_p = E_{p,el} + E_{p,\text{torsion}}$:

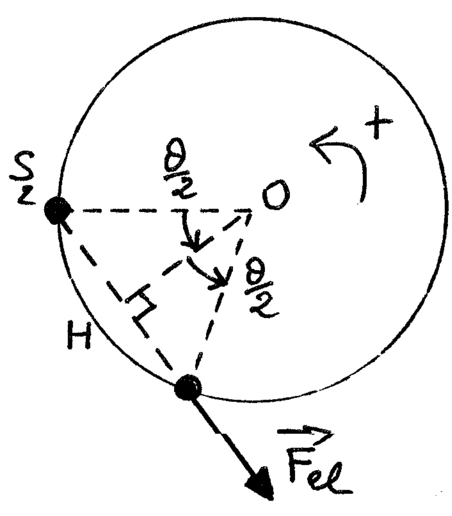
$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\,\frac{-\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} + C\theta_1 = 0$$

On a :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}\underbrace{\left(\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}_{>0 \text{ si } 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ et } \theta_1 = 36° = 0,63\text{ rad}} + C > 0$$

donc E_p est minimale pour $\theta = \theta_1$ et l'équilibre est stable

d) $$\|\vec{F}_{el}\| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 S_1S_2^{\,2}} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



force répulsive (schéma)

- bras de levier : $OH = a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- moment par rapport à Oz :
- $$\mathcal{M}_{Oz,el} = +OH\,\|\vec{F}_{el}\| = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}\,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

La condition d'équilibre du pendule est : $\mathcal{M}_{Oz,el} - C\theta = 0$

qui est bien l'équation ci-dessus.

e) $$q = \left(16\pi\varepsilon_0 a C \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\theta_1}{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}}_{\simeq 0{,}083}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \underline{10^{-8 \text{ à } 9}\ C}$$

B.2) a) <u>Dans le sens < 0 autour de Oz</u>

b) $S_1S_2 = 2a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

pour θ_1 : $S_1S_2 = 0{,}312\ a$ et pour $\frac{\theta_1}{2}$: $S_1S_2 = 0{,}157\ a$

<u>Donc S_1S_2 est pratiquement divisée par 2</u>

c) $\underline{\alpha = 2}$; la force $\|\vec{F}_{el}\|$ est multipliée par 4, son moment par rapport à Oz aussi (le bras de levier ne change presque pas : $\cos\theta_1 \simeq 0{,}99$ et $\cos\frac{\theta_1}{2} \simeq 1{,}00$) donc <u>la torsion du fil doit être multipliée par 4</u>.

Pour cela il faut tourner d'un angle $\theta_b < 0$ tel que :

$$\frac{\theta_1}{2} - \theta_b = 4\theta_1 \iff \underline{\theta_b = -\frac{7}{2}\theta_1 = 126°}$$

B.3) a) <u>Non</u>, il y a des frottements qui font diminuer l'amplitude d'oscillation. Ces frottements sont <u>nécessaires</u>, pour que le système se stabilise à sa position d'équilibre.

b) De manière analogue au A.3.c) : $\theta(t) = \theta_1 + e^{-\lambda'\omega'_0 t}\left(A\cos(\omega' t) + B\sin(\omega' t)\right)$

avec $\omega' = \omega'_0\sqrt{1-\lambda'^2}$

On a donc :

pseudo-période $\rightarrow$ $\dfrac{2\pi}{\omega'} = \dfrac{2\pi}{\omega'_0\sqrt{1-\lambda'^2}} = t_B - t_A = t_C - t_B = 4{,}1\,s$

décrément logarithmique $\rightarrow$ $\delta = \lambda'\omega'_0 \dfrac{2\pi}{\omega'_0\sqrt{1-\lambda'^2}} = \dfrac{2\pi\lambda'}{\sqrt{1-\lambda'^2}} = \ln\left(\dfrac{\theta_B-\theta_1}{\theta_C-\theta_1}\right) = \ln\left(\dfrac{\theta_A-\theta_1}{\theta_B-\theta_1}\right) = 0{,}63$

d'où $\underline{\lambda' \simeq 0{,}10 \text{ (sans unité)}}$ et $\underline{\omega'_0 = 1{,}54\ rad\,s^{-1}}$

c) Théorème du moment cinétique pour l'équipage mobile :

$$J\ddot{\theta} = -C\theta \underbrace{-\alpha'\dot{\theta}}_{\text{frottement}} + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}\,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= -C\theta - \alpha'\dot{\theta} + C\theta_1 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}_{=f(\theta)}$$

Pour $t > 15\,s$, θ est proche de θ_1. Posons $\theta = \theta_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$ rad

$$f(\theta) = f(\theta_1 + \varepsilon) \approx f(\theta_1) + f'(\theta_1)\,\varepsilon = 1 - \frac{1+\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\theta_1}\,\varepsilon$$

L'équation devient.

$$J\ddot{\varepsilon} = -\cancel{C\theta_1} - C\varepsilon - \alpha'\dot{\varepsilon} + \cancel{C\theta_1} - C\,\frac{1+\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\theta_1}\,\varepsilon$$

$$\ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{\alpha'}{J}}_{2\lambda'\omega'_0}\dot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{C}{J}\left(1 + \frac{1+\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\theta_1}\right)}_{\omega_0'^2}\varepsilon = 0$$

donc $\underline{\omega'_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}\sqrt{1 + \frac{1+\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\sin\theta_1}}} = 2{,}73\sqrt{\frac{C}{J}}$

	Chimie
1	$\Delta_h H$ de formation du dihydrogène gazeux est nulle car H_2 (g) sous la pression P° est l'état standard de référence de l'élément hydrogène (ou le corps simple dans l'état standard pour l'élément hydrogène).
2	$\Delta_r H° = \sum_k \nu_k \Delta_f H_k°$ AN : $\Delta_r H° = 165\ \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ Approximation d'Ellingham : $\Delta_r c_p° = 0$ car $\frac{d\Delta_r H°}{dT} = \Delta_r c_p°$
3	Le signe de $\Delta_r S°$ est celui de $\sum_{gaz} \nu_k$ (car l'entropie molaire des gaz est très supérieure à celle de liquides) ; il est donc positif . $A = A°(T) - RT \ln Q = \text{RT} \ln \text{K°/Q}$. Les pressions partielles étant égales toutes à 1 bar : $Q = 1$ Donc $A = A°(T) = T \cdot \Delta_r S° - \Delta_r H° = -\Delta_r G°$; elle augmente avec T et est positive si $T > T_i$ avec $T_i = \frac{\Delta_r H°}{\Delta_r S°}$ *(On peut déduire l'ordre de grandeur de $\Delta_r S°$ = 183 J.mol^{-1} K^{-1})*
4	L'enceinte est parfaitement adiabatique donc à pression consntante $\Delta H = 0$ On imagine un chemin fictif où la réaction a d'abord lieu à température constante : $\Delta H_1 = \xi_f \Delta_r H°$, où ξ_f est l'avancement de réaction final, avancement nul dans l'état initial, puis un chauffface à pression constante des produits de la réaction : $\Delta H_2 = \xi_f \left(C_{pm}(CO_2) + 4C_{pm}(H_2)\right)(T_f - T_i)$. On a donc : $\xi_f \Delta_r H° + \xi_f \left(C_{pm}(CO_2) + 4C_{pm}(H_2)\right)(T_f - T_i) = 0$ soit $T_f = T_i - \frac{\Delta_r H°}{C_{pm}(CO_2) + 4C_{pm}(H_2)} = T_i - 5K$ Les besoins énergétiques pour maintenir la température constante restent faibles .
5	Loi de Le Châtelier p augmente → sens 2 ($\Delta_r n_{gaz} > 0$) . Démonstration : $CH_4 + 2\ H_2O\ = CO_2\ + 4\ H_2$ Nombre de moles a b c d n = a+b+c+d Q =(c.d^4/ n² b².a) (P/P°)² Or A = RT ln (K°/Q) A l'équilibre A = 0 ; On fait varier la pression de dp > 0 à composition fixée et température fixée L'affinité varie de : dA = −2RT dP/P ; dP > 0, dA < 0 donc l'équilibre se déplace dans le sens 2
6	$CO_2 + CO_3^{2-} + H_2O = 2\ HCO_3^-$ $K° = K_{A1} / K_{A2}$ $K° = 1{,}0 \times 10^4$; La constante de cet équilibre est importante ; on peut considérer la réaction totale . On montre facilement qu'à léquilibre [H$^+$]² = $K_{A1}K_{A2}$; pH= ½ (pK_{A1}+pK_{A2}) pH = 8,3