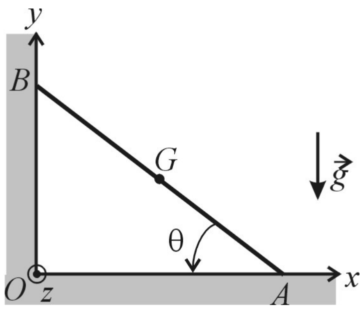
MP 08/09 – D.M. de PHYSIQUE n°7 pour le 24/11/09

Problème 1

Une tige AB, homogène, de masse m, de longueur 2ℓ, de centre d'inertie G est mobile dans le plan vertical Oxy d'un repère galiléen $Oxyz$. On repère sa position par l'angle θ toujours positif défini par $\theta = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u_x}})$. La section de la tige est de dimensions négligeables par rapport à sa longueur. On rappelle que le moment d'inertie J par rapport à tout axe perpendiculaire à AB passant par G a pour expression $J = \frac{1}{3} ml^2$. La tige est soumise à son poids, avec $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_y}$.



Les contacts en A et B avec les axes sont sans frottement. Les conditions initiales du mouvement sont : $\theta_0 = 75°$, $\dot{\theta}_0 = 0$. On donne : $\ell = 1m$ et $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-1}$.

A-

A.1) Exprimer quand la tige est en contact avec les axes en A et B, à l'aide de ℓ, θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ les coordonnées de G, de la vitesse $\overrightarrow{v_G}$ et de l'accélération $\overrightarrow{a_G}$. Déterminer le vecteur rotation de la tige.

A.2) Etablir les expressions de $\dot{\theta}^2$ et de $\ddot{\theta}$ en fonction de g, ℓ, θ et θ_0.

A.3) Etablir en fonction de m, g, ℓ, θ et θ_0 les expressions des actions de contact en A et B notées N_A et N_B.

A.4) Montrer qu'il existe une valeur θ_1 de θ à partir de laquelle la nature du mouvement va changer. Exprimer cette valeur θ_1 ainsi que la valeur $\dot{\theta}_1$ correspondante. *Application numérique.*

A.5) Déterminer la vitesse de G à l'instant où θ atteint la valeur θ_1. *Application numérique.*

A.6) Montrer que l'action de contact en A garde toujours le même sens pour θ compris entre θ_0 et θ_1.

B-

On étudie le mouvement de chute pour $\theta < \theta_1$ avec comme conditions initiales : $\theta = \theta_1$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1$.

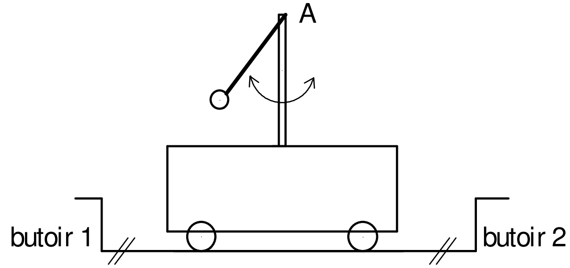
B.1) Que peut-on dire de la composante $\dot{x}$ de la vitesse de G pour ce mouvement ? L'exprimer en fonction de ℓ, θ_1 et $\dot{\theta}_1$ puis en fonction de g, ℓ et θ_0. Exprimer l'autre composante $\dot{y}$ en fonction de ℓ, θ et $\dot{\theta}$.

B.2) En déduire une intégrale première du mouvement et exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, g, ℓ, θ_1 et $\dot{\theta}_1$.

B.3) Déterminer la vitesse de G lorsque la tige arrive au contact avec le sol. *Application numérique.*

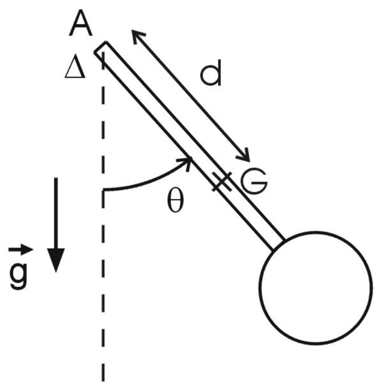
Problème 2

Au Palais de la Découverte à Paris vous pouvez observer, grâce à des réalisations originales, différents phénomènes physiques. L'une d'entre elles se présente sous la forme suivante :
Un chariot sur lequel est fixé un pendule pesant peut rouler en ligne droite sur quelques mètres entre deux butoirs.



Le public est invité à écarter le pendule de sa position d'équilibre soit lorsque le chariot n'est pas en contact avec les butoirs, soit lorsqu'il est contre le butoir. Les mouvements ultérieurs du chariot sont intéressants à étudier.
On considérera le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ comme galiléen.
Dans tout le problème on considère qu'il n'y a **aucun frottement**.

A- Le chariot est supposé immobile. Etude du pendule pesant.



Ce pendule est un solide plan indéformable qui peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal Δ passant par A et perpendiculaire à son plan. Sa masse est m et la distance entre A et son centre d'inertie d. Son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ est $J = \alpha md^2$ où α est nombre sans dimension.

A.1) Soit J_0 le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe passant par G et parallèle à Δ. En utilisant le théorème de Koenig démontrer que $J_\Delta = J_0 + md^2$. En déduire que $\alpha > 1$.

A.2) Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ.

A.3) Intégrer cette équation dans le cas des très petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta$) et donner l'expression de la période T_0 du mouvement. On notera θ_0 et $\dot{\theta}_0$ la position et la vitesse angulaire initiales.

A.4) Etude dans le cas des petites oscillations ($\sin\theta \neq \theta$).

a) Trouver une intégrale première liant $\dot{\theta}^2$, θ et θ_0 (élongation angulaire maximale), g et les paramètres caractéristiques du système.

b) Faire le changement de variable $\sin\frac{\theta}{2} = \left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\varphi$ et en déduire une équation différentielle en φ.

c) En vous limitant au second ordre en θ_0, établir alors l'expression de la période T des oscillations en fonction de T_0, établie en A.3), et de θ_0.

B- Etude du mouvement du chariot sans contact avec les butoirs.

Dans toute la suite du problème on considérera pour simplifier que le chariot de masse M est posé directement sur le sol (sans roues) et qu'il n'y a pas de frottement entre celui-ci et le sol (type mobile à coussin d'air).

On négligera tous les types de frottements dans toute la suite du problème.

On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 compris entre $-\pi/2$ et 0 (cf. figure) alors que le chariot est loin des butoirs et on lâche le pendule sans communiquer au système de vitesse initiale.

On pose $\beta = \dfrac{m}{m+M}$.

B.1)

a) Montrer qu'en appliquant le théorème de la résultante cinétique à l'ensemble chariot + pendule on obtient directement une relation entre $\dot{x}$ (vitesse du chariot), $\dot{\theta}$, et θ (relation 1).

b) Décrire qualitativement le mouvement du chariot en fonction de la position du pendule.

B.2) *Dans cette question uniquement on se place dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{chariot}}$ du chariot.*

a) Ce référentiel est-il galiléen ? Si non, exprimer la (ou les) force(s) fictives agissant sur le pendule dans ce référentiel ?

b) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ au pendule, trouver une relation entre $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$, et θ (relation 2).

B.3)

a) Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble chariot + pendule dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$. *Utiliser le théorème de Koenig pour calculer l'énergie cinétique du pendule.*

b) Donner l'expression de l'énergie potentielle de l'ensemble.

c) En déduire une relation entre $\ddot{x}$, $\dot{x}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$, et θ (relation 3).

d) Cette relation est-elle indépendante des relations 1 et 2 ?

B.4)

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ.

b) Simplifier cette équation en ne considérant que les très petites oscillations.

c) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

C- Mouvement du chariot en contact avec un butoir.

On procède comme dans la partie B. Cependant le chariot est au départ contre le butoir n°1.

C.1)

a) Quelle est la position du pendule lorsque le chariot décolle du butoir ? On pourra répondre à cette question en supposant que le pendule est un pendule simple (masse ponctuelle pendue à un fil).

b) En déduire la nouvelle relation entre $\dot{x}$ et $\dot{\theta}$.

c) Décrire qualitativement l'allure du mouvement du chariot.

C.2)

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ.

b) La résoudre dans les cas de très petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta$).